ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

UNTER MITWIRKUNG VON K. BEYER VDI, G. HAMEL VDI, L. PRANDTL VDI UND C. WEBER. HERAUSGEGEBEN VON FR. A. WILLERS, DRESDEN

Band 19 — Seite 1 bis 64

Heft 1 — Februar 1939

INHALT:

HAUPTAUFSÄTZE:



VDI-VERLAG G.M.B.H., BERLIN NW 7

Englisch-französische Titelerläuterungen der in Band XIX, Heft 1 der „ZAMM" (1939) veröffentlichten Hauptaufsätze.

A. Huber in Wien.

The progress of the melting point in a linear conductor. The term „melting curve" is used to designate the graphical representation of the dependence upon time of that part of a linear conductor, where the solid phase passes over into the liquid. The melting curve is approximated in numerous small intervals by straight lines. Its determination follows then from the solution of boundary problems for a series of trapezoidal areas for which purpose a special case of transformation, discovered by Appell, is used.

Sur la propagation de la fusion dans un conducteur linéaire. On appelle „courbe de fusion" la représentation graphique de la loi, suivant laquelle le déplacement du point de contiguïté des phases liquide et solide dépend du temps. Pour aborder le problème, l'auteur remplace la courbe, dans des intervalles suffisamment petits, par un trait polygonal. De cette manière la détermination de la courbe se ramène à la résolution des problèmes de limite pour une suite de domaines de la forme d'un trapèze en employant un cas particulier d'une transformation indiquée par Appell.

W. Bollay in Cambridge, Mass. U. S. A.

A non-linear wing theory and its application to rectangular wings of small aspect ratio. The author develops a non-linear wing theory for calculating the forces acting upon the wing of small aspect ratio. This theory differs principally from the usual theory of lifting vortex line or lifting surface, in that the trailing vortices leave the lifting surface at an angle, at the point of formation. The ensuing velocity tangential to the lifting surface, alters the resulting force on the surface. The theory agrees well with the experimental results obtained by Winter.

Une théorie non-linéaire des ailes et son application aux ailes rectangulaires à grande profondeur. Pour déterminer les forces agissant sur une aile à grande profondeur, l'auteur développe une théorie qui s'appuie sur la supposition que les tourbillons se détachent de la surface portante sous un angle à l'endroit même où ils se forment. En ce cas naît une vitesse tangentielle à la surface portante modifiant la force résultante qui agit sur l'aile. Les résultats de la théorie s'accordent bien avec les expériences de Winter.

R. Müller in Berlin.

The numerical computation and application of certain functions related to Bessel's together with comments on Bessel functions themselves. With the aid of the tables given for the expressions:

$$\int_0^x J_0(i\xi)\,d\xi, \qquad \int_0^x i\frac{\pi}{2}H_0^{(1)}(i\xi)\,d\xi, \qquad \varphi(x)=\int_0^{\pi/2} e^{-x\sin t}\,dt \quad \text{and} \quad \frac{d\varphi}{dx}$$

a large number of functions in integral form become readily accessible; for example the Struve functions for half integers as parameters. Further these tables enable the solution of inhomogeneous Bessel differential equations with a disturbing function, in the form of a potential series with whole positive and negative exponents. This renders the numerical treatment of wing vibrations and induced vibrations of cylindrical bodies simpler. Finally, a number of differential equations reducible to Bessel equations are given.

Sur l'évaluation numérique et l'application de certaines fonctions ressemblant aux fonctions bessèliennes, avec quelques annotations sur le domaine des fonctions bessèliennes. À l'aide des tables pour les fonctions

$$\int_0^x J_0(i\xi)\,d\xi, \qquad \int_0^x i\frac{\pi}{2}H_0^{(1)}(i\xi)\,d\xi, \qquad \varphi(x)=\int_0^{\pi/2} e^{-x\sin t}\,dt \quad \text{et} \quad \frac{d\varphi}{dx}$$

il est possible de calculer un assez grand nombre d'autres fonctions se présentant sous les formes d'intégrales, p. e. les fonctions de Struve aux paramètres de la forme $n+\frac{1}{2}$. En outre les tables permettent de résoudre l'équation non-homogène de Bessel contenant une fonction perturbatrice par une série de puissances à exposants positifs et négatifs. Cette solution facilite l'étude des oscillations des ailes ainsi que des oscillations contraintes des corps cylindriques. L'auteur finit par indiquer quelques équations différentielles réductibles aux équations différentielles de Bessel.

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 19 | Februar 1939 | Heft 1

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Über das Fortschreiten der Schmelzgrenze in einem linearen Leiter.

Von *A. Huber* in Freiburg (Schweiz), jetzt in Wien.

Wenn sich ein linearer homogener Leiter teils im festen, teils im flüssigen Aggregatzustande befindet, dann werden die Trennungsstellen der beiden Zustände, an denen also gerade die Schmelztemperatur herrscht, im allgemeinen ihre Lage mit der Zeit ändern. In einem x, t-Diagramm werden daher jene Stellen eine aus einem oder mehreren getrennten Stücken bestehende Kurve beschreiben, die wir als Schmelzkurve[1]) bezeichnen wollen. Die besondere Schwierigkeit der zur Ermittlung dieser Kurve zu lösenden Randwertaufgabe besteht bekanntlich darin[2]), daß ein Teil des Randes selber zu den Unbekannten des Problemes gehört. Da mir abgesehen von den in der Enzyklopädie d. mathem. Wissensch., 5. Bd., 1. H., S. 204f. angeführten älteren Lösungsversuchen eines besonderen Falles dieser Aufgabe aus neuerer Zeit nur eine Arbeit des Herrn K. Lachmann[3]) und ein Referat über einen Aufsatz des Herrn S. Kowner[4]) bekannt geworden sind, so möchte ich im folgenden eine allgemein anwendbare neue Methode zur näherungsweisen Bestimmung der Schmelzkurve mitteilen und durch ein vollständig durchgerechnetes Beispiel illustrieren. Ihre praktische Anwendung erfordert allerdings, wenn man auf eine bei Wärmeleitungsproblemen ungewöhnlich große Genauigkeit Wert legt, einen erheblichen Aufwand an rechnerischer Arbeit, aber auch die von Herrn Lachmann angegebene Lösung des von ihm betrachteten technisch interessanten Sonderfalles, der sich durch besondere Symmetrieverhältnisse auszeichnet, stellt in dieser Hinsicht ziemlich hohe Ansprüche. Weiters liegt dem von Herrn Lachmann mittels der Methode der Quellpunkte durchgeführten Ansatze, der sich überhaupt nur in dem von ihm betrachteten besonderen Fall machen läßt, die wesentliche Annahme zugrunde, daß Temperatur- und Wärmeleitzahl vom Aggregatzustande unabhängig seien, so daß man für die ganze Ausdehnung des Leiters nur eine einzige Differentialgleichung zu integrieren hat. Diese Annahme hat natürlich eine bedeutende Vereinfachung der Rechnung zur Folge, indessen dürften wohl nicht unbegründete Bedenken am Platze sein, ob sie in der Regel wenigstens einigermaßen den Beobachtungstatsachen entspricht. Nun zeigt aber schon eine flüchtige Betrachtung der wenigen Fälle, in denen überhaupt Beobachtungen der Wärmeleitzahl $\varkappa$ aus einem Temperatur-

[1]) Obwohl diese Bezeichnung in der Thermodynamik bekanntlich in einem ganz anderen Sinne bereits verwendet wird, wollen wir sie der Kürze wegen doch beibehalten, da ja hier wohl keine Verwechslung zu befürchten ist.

[2]) Vgl. z. B. Riemann-Weber: Die Diff.- u. Int.-Gl. d. Mech. u. Phys., 7. Aufl., hgg. v. P. Frank u. R. v. Mises (1927), 2. Bd., S. 220 ff.

[3]) ZAMM 15 (1935), S. 345 bis 358: Zum Problem des Erstarrens f. d. durch zwei parallele Ebenen begrenzten Körper.

[4]) Journ. Géophys. Moskow 3 (1933), S. 32 bis 41 [Jahrb. d. Fortschr. d. Math. 59/II (1933), S. 1477].

intervall vorliegen, das auch den Schmelzpunkt der betreffenden Substanz enthält[5]), daß sich $\varkappa$ im allgemeinen zwar wenig ändert, solange die Temperatur entweder ständig ober- oder ständig unterhalb des Schmelzpunktes bleibt, daß dagegen beim Überschreiten desselben eine oft bis über den halben Betrag anwachsende plötzliche Abnahme von $\varkappa$ stattfindet. Nur Wismut zeigt eine starke Zunahme, indem $\varkappa(200^0) = 0{,}017$ und $\varkappa(300^0) = 0{,}037$ werden. Bei dieser Sachlage dürfte daher eine Näherungsmethode zur Bestimmung der Schmelzkurve, die der raschen Veränderlichkeit von $\varkappa$ in der Umgebung des Schmelzpunktes wenigstens dadurch Rechnung trägt, daß den beiden Aggregatzuständen entsprechend zwei verschiedene konstante Mittelwerte für $\varkappa$ gesetzt werden, nicht ohne Interesse sein, wenn auch ihre Durchführung in einem konkreten Fall ziemlich viel Arbeit erfordert.

1. Ansatz zur strengen Lösung für den unbegrenzten Leiter. Um die großen Schwierigkeiten, die einer exakten Lösung des in Frage stehenden Problemes im Wege stehen, deutlich hervortreten zu lassen, wollen wir für den Fall des beiderseits unbegrenzten Leiters zeigen, wie sie sich bei Benutzung der bekannten Ansätze gestalten würde. Durch die Indizes 1 und 2 unterscheiden wir den festen und den flüssigen Zustand und nehmen an, daß der Leiter zur Zeit $t=0$ für $x<0$ fest und für $x>0$ flüssig sei. Dann handelt es sich um die Bestimmung je eines Integrales der beiden Gleichungen

$$\frac{\partial \vartheta_i}{\partial t} = a_i^2 \frac{\partial^2 \vartheta_i}{\partial x^2} \quad (i=1,2),$$

die den folgenden Bedingungen genügen:

a) $\vartheta_1(x,0) = \varphi_1(x) \leqq 0$ für $x \leqq 0$ und $\vartheta_2(x,0) = \varphi_2(x) \geqq 0$ für $x \geqq 0$, wobei $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$ die Schmelztemperatur bedeuten und $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ stetig differenzierbar sein sollen, und es möge sich ein eventuell ursprünglich an der Trennungsstelle vorhanden gewesener Temperatursprung bereits ausgeglichen haben.

b) Für $t \geqq 0$ seien mit $x = s(t)$ die noch unbekannte Gleichung der Schmelzkurve bezeichnet, mit $\varkappa_i$ die als konstant angenommenen Wärmeleitzahlen, mit ϱ die Dichte und mit λ die Schmelzwärme, dann soll:

α) $$\vartheta_1[s(t),t] = \vartheta_2[s(t),t] = 0,$$

β) $$\left[\varkappa_1 \cdot \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} - \varkappa_2 \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x}\right]_{x=s(t)} = \lambda \cdot \varrho \cdot \frac{ds}{dt}{}^{6)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Es seien nun $\vartheta_i'(x,t)$ zwei den Anfangsbedingungen a) genügende Integrale und

$$\vartheta_i'[s(t),t] = -\psi_i(t),$$

dann haben wir je ein weiteres Integral $\vartheta_i''[x,t;s(t)]$ so zu bestimmen, daß

$$\vartheta_i''[x,0;s(t)] = 0 \quad \text{und} \quad \vartheta_i''[s(t),t,s(t)] = \psi_i(t).$$

Dazu setzt man bekanntlich

$$\vartheta_i''[x,t;s(t)] = \frac{1}{2\,a_i\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^t \omega_i(\tau)\frac{x-s(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{[x-s(\tau)]^2}{4a_i^2(t-\tau)}} \cdot d\tau,$$

woraus sich zur Bestimmung der beiden Funktionen $\omega_i(\tau)$ die folgenden Integralgleichungen ergeben, deren Kerne aber von der ja noch unbekannten Funktion $s(t)$ abhängen:

$$(-1)^i \cdot \omega_i(t) + \frac{1}{2\,a_i\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^t \omega_i(\tau)\frac{s(t)-s(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{[s(t)-s(\tau)]^2}{4a_i^2(t-\tau)}} \cdot d\tau = \psi_i(\tau).$$

Für die Temperaturverteilung in den beiden Teilen des Leiters erhält man somit

$$\vartheta_i[x,t;s(t)] = \vartheta_i'(x,t) + \vartheta_i''[x,t;s(t)],$$

wobei identisch für jedes $s(t)$:

$$\vartheta_i[x,0;s(t)] = \varphi_i(x) \quad \text{und} \quad \vartheta_i[s(t),t;s(t)] = 0,$$

[5]) Landolt-Börnstein: Phys.-chem. Tabellen, 5. Aufl., 2. Bd. (1923), S. 1289.

[6]) Ob man hier für ϱ die Dichte des festen oder des flüssigen Zustandes zu wählen hat, hängt, strenge genommen, von der Richtung ab, nach der die Schmelzgrenze fortschreitet. Man müßte aber dann, wenn man diesen Umstand berücksichtigen wollte, folgerichtig auch schon bei der Bildung der Wärmeleitungsgleichung die Wärmeausdehnung des Leiters beachten. Es soll also ϱ einen Mittelwert der im allgemeinen ohnehin nicht stark mit der Temperatur variierenden Dichte bedeuten.

während sich zur Bestimmung der Schmelzkurve $x = s(t)$ die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung (1) ergibt. Um mit diesem Ansatze $s(t)$ näherungsweise bestimmen zu können, wäre es wohl das Nächstliegende, $s(t)$ durch ein Polygon zu approximieren, aber die dann nicht zu vermeidende Lösung der beiden Integralgleichungen würde dabei erhebliche Schwierigkeiten verursachen, die sich für einen beiderseits begrenzten Leiter noch bedeutend steigern würden. Deshalb war es unser Ziel, die nun zu schildernde Näherungsmethode zur Bestimmung der Schmelzkurve von vorneherein schon so einzurichten, daß dabei — wenigstens explizite — die Auflösung von Integralgleichungen umgangen wird.

2. Ansatz zur näherungsweisen Bestimmung der Schmelzkurve. Um unnötige Weitläufigkeiten zu ersparen, wollen wir nun unsere Näherungsmethode an einem besonderen Fall auseinandersetzen, der aber doch wieder so allgemein ist, daß ihre wesentlichen Züge deutlich hervortreten. Wir betrachten dazu einen linearen Leiter, dessen Enden die Abszissen $x = 0$ und $x = l$ haben mögen und der zur Zeit $t = 0$ im Intervall $(0, q_1)$ fest, in (q_1, q_2) flüssig und in (q_2, l) wieder fest sein soll. Natürlich setzen wir dabei voraus, daß sich auch im flüssigen Teil die Wärme nur durch Leitung und nicht auch durch Konvektion fortpflanzen soll und daß die Wärme- und die Temperaturleitzahlen für jeden der beiden Aggregatzustände konstant bleibende Werte haben mögen. Bezeichnen wir also die Schmelztemperatur wieder mit $\vartheta = 0$, dann soll:

$$\vartheta(x, 0) = \begin{cases} \varphi_0(x) \leq 0 & \text{für} \quad 0 \leq x \leq q_1 \\ \varphi_1(x) \geq 0 & \text{für} \quad q_1 \leq x \leq q_2 \\ \varphi_2(x) \leq 0 & \text{für} \quad q_2 \leq x \leq l \end{cases} \qquad (2),$$

wobei die Funktionen $\varphi_j(x)$ als stetig differenzierbar vorausgesetzt werden und an den Intervallgrenzen stetig ineinander übergehen sollen, also $\varphi_0(q_1) = \varphi_1(q_1) = \varphi_1(q_2) = \varphi_2(q_2) = 0$. An den Enden $x = 0$ und $x = l$ sollen die Temperaturen etwa als Funktionen der Zeit vorgeschrieben sein:

$$\vartheta(0, t) = f(t) \quad \text{und} \quad \vartheta(l, t) = g(t) \qquad (3),$$

wobei noch $\varphi_0(0) = f(0)$, $\varphi_2(l) = g(0)$ und der Einfachheit halber stets $f(t) < 0$ und $g(t) < 0$ bleiben sollen, damit wir uns bei der Bestimmung der Schmelzkurve vorläufig auf einen die Punkte $x = q_1$ und $x = q_2$ verbindenden Bogen beschränken können. Man wird später leicht bemerken, daß diese Einschränkungen keineswegs wesentlich sind, sowie auch, daß man die Randbedingungen (3), ohne die Anwendbarkeit der Methode zu beeinträchtigen, durch andere ersetzen könnte.

Die Schmelzkurve geht also jedenfalls durch die Punkte $x = q_1$ und $x = q_2$ hindurch, und die Richtungen ihrer Tangenten in diesen Punkten ergeben sich sofort aus (1), die ja auch für $t = 0$ gelten muß:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_1 \cdot \varphi_0'(q_1) - \varkappa_2 \cdot \varphi_1'(q_1) &= \lambda \cdot \varrho \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)_{q_1} \\ \varkappa_1 \cdot \varphi_2'(q_2) - \varkappa_2 \cdot \varphi_1'(q_2) &= \lambda \cdot \varrho \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)_{q_2} \end{aligned}\right\} \qquad (4).$$

Bei unseren Annahmen über die Funktionen $\varphi_j(x)$ werden die $\left(\frac{ds}{dt}\right)_{q_i}$ sicherlich endliche Größen sein, die eventuell auch verschwinden können, so daß also die Schmelzkurve die x-Achse im allgemeinen unter einem von Null verschiedenen Winkel schneiden wird. Der Fall, daß die Schmelzkurve die x-Achse berührt, was dann eintreten würde, wenn die eine oder die andere der auf den linken Seiten von (4) stehenden Ableitungen unendlich werden würde, bedarf einer besonderen Erörterung, weil ja dann die Konstruktion der Schmelzkurve gleich zu Beginn versagen würde. Dies wird sich praktisch sogar sehr häufig einstellen, nämlich immer dann, wenn der feste Teil des Leiters mit dem über dem Schmelzpunkt erwärmten flüssigen Teil plötzlich zusammenstößt, so daß im Augenblicke der Berührung eine Unstetigkeit der Temperatur selber an der Berührungsstelle auftritt, doch soll vorläufig dieser Fall bei den folgenden Überlegungen ausdrücklich ausgeschlossen sein, was ja auch schon in den Annahmen über die Funktionen $\varphi_j(x)$ zum Ausdruck gebracht worden ist.

Wir denken uns nun in den Punkten $x = q_1$ und $x = q_2$ die Tangenten der Schmelzkurve konstruiert, deren Richtungen ja durch (4) gegeben sind, und schneiden sie mit einer Parallelen zur x-Achse im Abstande $\Delta t > 0$ in den Punkten Q_1' bzw. Q_2'. Wenn wir sodann unter der Annahme, daß die Schmelzkurve für ein hinreichend kleines Δt durch die soeben konstruierten Tangenten genügend genau approximiert wird, die Temperaturverteilung im

ganzen Leiter, also von $x=0$ bis $x=l$, für $t=\Delta t$ den gegebenen Anfangs- und Randbedingungen gemäß berechnen können, dann lassen sich wieder mittels der jetzt aber für $x=q_1+\left(\frac{ds}{dt}\right)_{q_1}\cdot\Delta t$ bzw. für $x=q_2+\left(\frac{ds}{dt}\right)_{q_2}\cdot\Delta t$ analog wie (4) zu bildenden Relationen die Tangenten in den Punkten Q_1' und Q_2' konstruieren. Man kann also durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens die gesuchte Schmelzkurve durch ein Polygon um so genauer approximieren, je kleiner man die Zeitintervalle Δt wählt.

Wegen $\frac{\partial^2 \vartheta_i}{\partial x\,\partial t}=a_i^2\frac{\partial^3 \vartheta_i}{\partial x_i^3}$ kann man mittels der aus (1) folgenden Relation:

$$\left[\varkappa_1\cdot\left(\frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial x^2}\cdot\frac{ds}{dt}+\frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial x\,\partial t}\right)-\varkappa_2\left(\frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial x^2}\cdot\frac{ds}{dt}+\frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial x\,\partial t}\right)\right|_{x=s(t)}=\lambda\cdot\varrho\cdot\frac{d^2 s}{dt^2}$$

auch leicht eine parabolische Approximation der Schmelzkurve erreichen. Wir werden in der Tat später sehen, daß die Bildung der Werte der Ableitungen höherer Ordnung von ϑ nach x allein, auf die es ja letzten Endes ankommt, auch praktisch leicht durchgeführt werden kann, so daß man für die Funktionen $s_{q_i}(t)$, oder besser noch für ihre Umkehrungen auch in einem größeren Intervall brauchbare Darstellungen finden könnte. Diese Überlegungen ließen sich übrigens ohne erhebliche Schwierigkeiten zu einem „Existenzbeweis" für die Funktionen $s_q(t)$ ausbauen, doch ist hier nicht der passende Ort hierzu. Wir werden aber später, sobald wir die hierzu nötigen Formeln aufgestellt haben werden, leicht zeigen können, daß unser Verfahren das sehr vorteilhafte Bestreben besitzt, die infolge der Approximation der Schmelzkurve durch ihre Tangenten entstehenden Fehler von selber auszugleichen, so daß man praktisch wohl in den meisten Fällen mit einer Polygonapproximation der Schmelzkurve auskommen wird, zumal da es ja angesichts der großen Unsicherheit, mit der die Angaben der hier in Frage kommenden thermischen Konstanten naturgemäß behaftet sind, überhaupt nicht viel Sinn hat, an die Genauigkeit der Rechnung hohe Ansprüche zu stellen.

Unser Problem erscheint somit auf die wiederholte Lösung der folgenden Randwertaufgabe zurückgeführt: es ist der räumlich-zeitliche Temperaturverlauf in einem Leiter zu bestimmen, dessen Anfangstemperatur als differenzierbare Funktion seiner Abszisse gegeben ist und von dem beide Enden auf der Temperatur $\vartheta=0$ gehalten werden und sich mit bekannten konstanten Geschwindigkeiten bewegen. Es sei hierzu noch bemerkt, daß man die für die beweglichen Enden gemachten Annahmen $\vartheta=0$ auch durch allgemeinere ersetzen kann, ohne die Anwendbarkeit der nun zu entwickelnden Methode zu beeinträchtigen, so daß sie auch zur näherungsweisen Lösung von Randwertaufgaben für ein Gebiet dienen kann, das unten von einer zur x-Achse parallelen Strecke und seitwärts von zwei Kurven begrenzt wird, die von einer Parallelen zur x-Achse in je einem Punkte bloß getroffen werden[7]). Unsere Methode versagt natürlich nicht nur in dem bereits erwähnten Falle eines Temperatursprunges an der Schmelzgrenze, sondern auch dann, wenn der Schmelz- bzw. Erstarrungsvorgang an einem Ende des Leiters beginnt, da ja dann die Relation (4) nicht verwendet werden kann. Wir werden später noch ausführlich darauf zurückkommen und wenden uns jetzt zur

3. Lösung der Randwertaufgabe für einen Leiter, dessen Länge eine lineare Funktion der Zeit ist. Wir bezeichnen jetzt mit X die Abszisse eines beliebigen Punktes unseres Leiters, mit T die Zeit und mit

$$Q_i=p_i\,T+q_i \qquad (i=1,2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

die Abszissen der beweglichen Enden. Dann soll dasjenige Integral der Gleichung

$$\frac{\partial \Theta}{\partial T}=a^2\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2}$$

gesucht werden, das den folgenden Bedingungen genügt:

$$\left.\begin{array}{llll}\text{a)} & \Theta(X,0)=\Phi(X) & \text{für} & q_1\leqq X\leqq q_2 \\ \text{b)} & \Theta(p_i\,T+q_i,T)=0, & \text{wobei} & \Phi(q_1)=\Phi(q_2)=0\end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6).$$

Um das Ergebnis gleich in einer für die numerische Auswertung bequemen Form zu erhalten, führen wir dimensionslose Variable ein, indem wir setzen:

$$x=\frac{X-q_1}{q_2-q_1}, \qquad t=\frac{a^2\,T}{(q_2-q_1)^2}; \qquad \Theta(X,T)=\vartheta(x,t); \qquad \Phi(X)=\Phi(q_1+(q_2-q_1)\,x)=\varphi(x) \quad (5').$$

[7]) Vortrag bei der Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Bad Kreuznach am 21. Sept. 1937.

Es ist also nun jenes Integral der Gleichung

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}$$

zu suchen, für welches:

$$\text{a)} \quad \vartheta(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1\,; \qquad \text{b)}\ \vartheta(p_i'\, t, t) = \vartheta(p_2'\, t + 1, t) = 0 \quad . \quad . \quad (6'),$$

wobei noch $p_i' = \frac{q_2 - q_1}{a^2} \cdot p_i$ gesetzt wurde.

Wir zerlegen die gesuchte Lösung in der üblichen Weise, indem wir durch den Ansatz $\vartheta = \vartheta' + \vartheta''$, wo

$$\vartheta'(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \cdot \int_0^1 \varphi(\xi) \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \cdot d\xi\,,$$

die Anfangstemperatur zunächst auf Null reduzieren. Wegen $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ ist für $t = 0$ zwar noch ϑ' selber, aber im allgemeinen nicht mehr $\frac{\partial \vartheta'}{\partial x}$ auch bei $x = 0$ und $x = 1$ stetig, doch ist dieser Nachteil, der sich übrigens leicht beheben ließe, für unsere Zwecke belanglos. Nun ist ϑ'' so zu bestimmen, daß $\vartheta''(x, 0) = 0$ und

$$\vartheta''(p_1'\, t, t) = -\vartheta'(p_1'\, t, t) = \psi_1(t) \quad \text{und} \quad \vartheta''(p_2'\, t + 1, t) = -\vartheta'(p_2'\, t + 1, t) = \psi_2(t) \quad (6''),$$

und diese Aufgabe läßt sich, wie wir gleich sehen werden, durch eine einfache Transformation auf eine analoge für einen Leiter mit festen Enden zurückführen.

Schon vor längerer Zeit hat nämlich Appell[8]) gezeigt, daß durch die folgende Transformation die Wärmeleitungsgleichung in sich übergeführt wird:

$$x' = \gamma \frac{x - \beta}{t - \alpha} + \beta'\,; \qquad t' = -\frac{\gamma^2}{t - \alpha} + \alpha'\,; \qquad \vartheta'' = \frac{C}{\sqrt{t - \alpha}} \cdot e^{-\frac{(x-\beta)^2}{4(t-\alpha)}} \cdot \bar{\vartheta}(x', t') \quad . \quad . \quad (7).$$

Die Transformation der beiden unabhängig Veränderlichen bedeutet eine Kollineation, bei der die Gerade $t = \alpha$ der (x, t)-Ebene in die unendlich ferne Gerade der $(x'\, t')$-Ebene übergeht. Nun sieht man aber leicht, daß man über die Parameter $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ und γ so verfügen kann, daß diese Kollineation eine zentrische wird mit der x-Achse als Kollineationsachse, wobei noch die beiden Geraden $x = p_1' \cdot t$ und $x = p_2' \cdot t + 1$ bzw. in die Geraden $x' = 0$ und $x' = 1$ übergehen. Damit nämlich zunächst die x-Achse zur Kollineationsachse wird, muß $t' = 0$ aus $t = 0$ folgen, also muß gemäß der zweiten Gl. (7)

$$\gamma^2 = -\alpha \cdot \alpha' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

und die erste Gl. (7) für $x' = x$ identisch in x erfüllt sein:

$$x(\gamma + \alpha) - \gamma\,\beta - \beta'\,\alpha' = 0,$$

woraus wegen (8) folgt:

$$\gamma = -\alpha = \alpha' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8'),$$

so daß auch

$$\beta = \beta' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8'').$$

Damit nun noch $x = p_1'\, t$ in $x' = 0$ und $x = p_2'\, t + 1$ in $x' = 1$ übergehen, müssen die aus der ersten Gl. (7) sich ergebenden Identitäten in t bestehen:

$$\beta \cdot (t - \alpha) - \alpha \cdot (p_1' \cdot t - \beta) = 0 \quad \text{und} \quad (\beta - 1) \cdot (t - \alpha) - \alpha \cdot (p_2' \cdot t + 1 - \beta) = 0\,.$$

Dazu muß offenbar $\beta = \alpha\, p_1'$ und $\beta - 1 = \alpha \cdot p_2'$, womit nach (8') und (8'') folgt, daß:

$$\beta = \beta' = \frac{p_1'}{p_1' - p_2'}\,; \qquad \alpha = -\alpha' = -\gamma = \frac{1}{p_1' - p_2'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Man rechnet leicht nach, daß α und β Ordinate und Abszisse des Schnittpunktes der beiden Geraden $x = p_1' \cdot t$ und $x = p_2'\, t + 1$ bedeuten, in dessen senkrechte Projektion auf die x-Achse das Kollineationszentrum fällt, weil ja aus der zweiten Gl. (7) folgt, daß $t' = \alpha' = -\alpha$ für

[8]) Journ. de math. (4), 8 (1892), S. 187 bis 216, Sur l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}$ et la Théorie de la chaleur.

$t = \infty$. Mit den in (9) angegebenen Werten für α und β lassen sich nun die ersten zwei Gl. (7) so schreiben:

$$x' = \frac{\alpha \cdot x - \beta \cdot t}{\alpha - t}; \qquad t' = \frac{\alpha \cdot t}{\alpha - t} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10'),$$

oder

$$x = \frac{\alpha \cdot x' + \beta \cdot t'}{\alpha + t'}; \qquad t = \frac{\alpha \cdot t'}{\alpha + t'} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10'').$$

Die für ϑ'' vorgeschriebenen Anfangs- und Randwerte erhalten schließlich gemäß der dritten Gl. (7) für $\bar{\vartheta}(x', t')$ die folgende Form, wenn wir noch das ohnehin herausfallende $C = 1$ setzen:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\vartheta}(x', 0) = 0 \qquad \text{für} \qquad 0 \leq x' < 1 \\ &\bar{\vartheta}(0, t') = \sqrt{\frac{-\alpha^2}{\alpha + t'}} \cdot e^{-\frac{\beta^2}{4(t'+\alpha)}} \cdot \psi'_1\left(\frac{\alpha t'}{\alpha + t'}\right) = \chi_1(t') \\ &\bar{\vartheta}(1, t') = \sqrt{\frac{-\alpha^2}{\alpha + t'}} \cdot e^{-\frac{(1-\beta)^2}{4(t'+\alpha)}} \cdot \psi'_2\left(\frac{\alpha t'}{\alpha + t'}\right) = \chi_2(t') \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11).$$

Damit ergibt sich $\bar{\vartheta}(x', t')$ als Summe der beiden „Faltungsintegrale“ [9]):

$$\bar{\vartheta}(x', t') = \chi_1(t') \star G(x', t') + \chi_2(t') \star G(1 - x', t') \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12),$$

wobei

$$G(x', t') = -\frac{\partial}{\partial x} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x'+2n)^2}{4t'}}}{\sqrt{\pi t'}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t'^3}} \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} (x' + 2n) \cdot e^{-\frac{(x'+2n)^2}{4t'}}.$$

Für die Anwendung unserer Methode ist es nun von großer Wichtigkeit, daß man die in (12) vorkommenden Doppelintegrale auf einfache reduzieren kann, indem sich nämlich die Integration nach der Zeit elementar ausführen läßt. Es wird nämlich zunächst nach (6''),

$$\psi'_1(t) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^1 \varphi(\xi) \cdot e^{-\frac{(p_1' t - \xi)^2}{4t}} \cdot d\xi \qquad \text{und} \qquad \psi'_2(t) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^1 \varphi(\xi) \cdot e^{-\frac{(p_2' t + (1-\xi))^2}{4t}} \cdot d\xi,$$

also nach (9), (10'') und (11):

$$\chi_1(t') = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{-\alpha}{t'}} \cdot e^{-\frac{\beta^2}{\alpha}} \cdot \int_0^1 \varphi(\xi) \cdot e^{\frac{\beta\xi}{2\alpha} - \frac{\alpha + t'}{4\alpha t'} \cdot \xi^2} \cdot d\xi.$$

In entsprechender Weise ergibt sich, wenn man $\beta \to (1 - \beta)$ und $\xi \to (1 - \xi)$ mit Ausnahme des Argumentes von φ:

$$\chi_2(t') = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{-\alpha}{t'}} \cdot e^{-\frac{(1-\beta)^2}{4\alpha}} \cdot \int_0^1 \varphi(\xi) \cdot e^{\frac{(1-\beta)\cdot(1-\xi)}{2\alpha} - \frac{\alpha + t'}{4\alpha t'} \cdot (1-\xi)^2} \cdot d\xi.$$

Zur Bildung des ersten Faltungsintegrales in (12) setzen wir noch der Kürze wegen $y_n = x' + 2n$ und finden

$$\chi_1 \star G(x') = -\frac{\sqrt{-\alpha}}{4\pi} \cdot e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{t'} \frac{y_n \cdot e^{-\frac{y_n^2}{4\tau}}}{\tau^{3/2} \cdot \sqrt{t' - \tau}} d\tau \int_0^1 \varphi(\xi) \cdot e^{\frac{\beta\xi}{2\alpha} - \frac{\alpha + t' - \tau}{4\alpha(t'-\tau)} \cdot \xi^2} \cdot d\xi,$$

da ja die zur Vertauschung von Summation und Integration nötigen Voraussetzungen erfüllt sind. Daraus entsteht nach für $y_n \neq 0$ offenbar erlaubter Vertauschung der Integrationsfolge

$$\chi_1 \star G = -\frac{\sqrt{-\alpha}}{4\pi} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 \varphi(\xi)\, e^{\frac{\beta\xi}{2\alpha} - \frac{\xi^2}{\alpha}} \cdot d\xi \int_0^{t'} \frac{y_n\, e^{-\frac{y_n^2}{4\tau} - \frac{\xi^2}{4(t-\tau)}}}{\tau^{3/2}\sqrt{t' - \tau}} d\tau.$$

---

[9]) G. Doetsch: Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung, M. Z. 22 (1925), S. 285 bis 306.

Führen wir im zweiten Integral statt τ die neue Integrationsvariable $\sigma = \frac{\tau}{t' - \tau}$ ein, so wird nach einfacher Rechnung[10])

$$\int_0^{t'} = \frac{y_n}{t'} e^{-\frac{y_n^2 + \xi^2}{4t'}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{y_n^2}{4t'} \cdot \frac{1}{\sigma} - \frac{\xi^2}{4t'} \sigma} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma^{3/2}} = \operatorname{sgn}(n) \cdot 2 \sqrt{\frac{\pi}{t'}} \cdot e^{-\frac{(|y_n| + \xi)^2}{4t'}},$$

wobei $\operatorname{sgn}(n) = \pm 1$, je nachdem $n \gtrless 0$ und $\operatorname{sgn}(0) = 1$. Es wird somit

$$\chi_1 \star G(x') = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{-\alpha}{\pi t'}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(n) \int_0^1 \varphi(\xi)\, e^{-\frac{(\beta - \xi)^2}{4\alpha} - \frac{(|y_n| + \xi)^2}{4t'}} d\xi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13')$$

und entsprechend, wenn $\overline{y}_n = 1 - x' + 2n$ gesetzt wird:

$$\chi_2 \star G(1 - x') = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{-\alpha}{\pi t'}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(n) \int_0^1 \varphi(\xi) \cdot e^{-\frac{(\beta - \xi)^2}{4\alpha} - \frac{(|\overline{y}_n| + 1 - \xi)^2}{4t'}} d\xi \quad . \; . \; . \; . \quad (13'').$$

Damit erhält man für $\vartheta = \vartheta' + \vartheta''$ wegen (7) und (12) und weil $-\frac{\alpha}{t'} = \frac{t - \alpha}{t}$:

$$\vartheta(x', t') = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^1 \varphi(\xi)$$

$$\cdot \left\{ e^{-\frac{(x - \xi)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x - \beta)^2}{4(t - \alpha)} - \frac{(\beta - \xi)^2}{4\alpha}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(n) \left[e^{-\frac{(|y_n| + \xi)^2}{4t'}} + e^{-\frac{(|\overline{y}_n| + 1 - \xi)^2}{4t'}} \right] \right\} d\xi,$$

wo die rechts vorkommenden x und t noch nach (10'') durch x' und t' auszudrücken sind. Führt man dies aus, indem man besonders die folgenden Relationen

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{t'} = \frac{1}{\alpha}; \qquad \frac{x - \beta}{t} = \frac{x' - \beta}{t'}; \qquad (\alpha - t) \cdot (\alpha + t') = \alpha^3$$

beachtet, so erhält man nach einigen Umformungen die für die numerische Auswertung wohl bequemste Darstellung, wenn man noch setzt

$$\varphi(\xi) \cdot e^{-\frac{(\beta - \xi)^2}{4\alpha}} = \psi(\xi):$$

$$\vartheta(x', t') = \frac{e^{-\frac{(x' - \beta)^2}{4(\alpha + t')}}}{2\sqrt{\pi t}} \cdot \int_0^1 \psi(\xi) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(e^{-\frac{(2n + x' - \xi)^2}{4t'}} - e^{-\frac{(2n + x' + \xi)^2}{4t'}} \right) \cdot d\xi \quad . \; . \; . \quad (14).$$

Wenn man über Tabellen der elliptischen Thetafunktion

$$\vartheta_3(v, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(v + n)^2}{t}}$$

verfügt, die für genügend kleine Schritte des Argumentes t berechnet sind, kann man davon zur Auswertung von (14) vorteilhaft Gebrauch machen, doch kommt man auch mit einer umfangreicheren Tafel für e^{-x} aus, da man nur wenige Glieder der in (14) vorkommenden Summe benötigt, indem ja das t' in der Regel sehr klein sein wird. Bei Beachtung der Formeln (10'') sieht man sofort, daß für $\alpha \to \infty$ und endliches β die Darstellung (14) übergeht in die für die Temperaturverteilung eines Leiters mit festen Enden. Die Lösung (14) ist natürlich nicht nur für den mittleren flüssigen Teil unseres Leiters brauchbar, sondern nach entsprechender Berücksichtigung der Randwerte auch für die beiden äußeren festen. Für den linken Teil wird nämlich $p_1 = q_1 = 0$, also auch $p_1' = 0$ und daher nach (9): $\beta = 0$ und $\alpha = -\frac{1}{p_2'}$. Ebenso wird für den rechten Teil $p_2 = 0$ und $q_2 = l$, also auch $p_2' = 0$ und daher $\beta = 1$ und $\alpha = \frac{1}{p_2'}$.

[10]) Vgl. z. B. Meyer-Dirichlet: Bestimmte Integrale, Leipzig (1871), § 99.

Diese Überlegungen bedürfen jedoch noch einer Ergänzung in dem bisher stillschweigend ausgeschlossenen Fall, daß $p_1 = p_2$, wo ja die oben betrachtete Kollineation in eine Affinität übergeht. Da wir die dann sich ergebenden Formeln für den unendlichen Leiter später benötigen werden, wollen wir kurz die Grenzübergänge andeuten, durch die man aus (9) die den Formeln (7) entsprechenden erhält. Es wird zunächst:

$$\lim_{p_2' \to p_1'} \frac{\beta}{\alpha} = p_1' = \frac{q_2 - q_1}{a^2}\, p = p',$$

wobei $p_1 = p_2 = p$. Damit wird (10'):

$$x' = x - p'\, t = x - \frac{q_2 - q_1}{a^2} \cdot p \cdot t; \quad t' = t \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15').$$

Um schließlich die der dritten Gl. (7) in unserem Falle entsprechende zu bekommen, setzen wir zunächst

$$C = \sqrt{|\alpha|} \cdot e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}.$$

Wird nun $|\alpha|$ sehr groß, dann ergibt sich für den Exponenten der e-Potenz in (7):

$$\frac{(x-\beta)^2}{4(\alpha - t)} = \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{\alpha} - \frac{2\beta}{\alpha}x + \frac{\beta^2}{\alpha}\right) \cdot \left(1 + \frac{t}{\alpha} + \frac{t^2}{\alpha^2} + \cdots\right) = \frac{\beta^2}{4\alpha} - \frac{\beta}{4\alpha} \cdot \left(2x - \frac{\beta}{\alpha}t - \frac{x^2}{\beta} + \cdots\right)$$

und somit wegen $\lim \frac{\beta}{\alpha} = p'$

$$\vartheta''(x, t) = e^{-\frac{p'}{4}(2x - p't)} \cdot \bar{\vartheta}(x - p'\, t, t) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15''),$$

was man natürlich auch durch einen naheliegenden Ansatz direkt hätte finden können. Die durch (15') dargestellte perspektive Affinität bedeutet offenbar eine Scherung parallel zur x-Achse, die selber punktweise festbleibt.

4. Der Beginn der Schmelzkurve bei stetiger Randbedingung. Die soeben auseinandergesetzte Methode zur Bestimmung der Schmelzkurve ist natürlich nur dann anwendbar, wenn der Erstarrungsvorgang schon ins Innere des Leiters fortgeschritten ist. Wenn aber etwa ein flüssiger Leiter an einem seiner freien Enden zu erstarren beginnt, dann kann man die Gl. (1) zur Berechnung der Tangentenrichtung der Schmelzkurve an diesem Ende des Leiters offenbar nicht mehr verwenden und muß daher zu diesem Zwecke andere Überlegungen anstellen, die, je nachdem die für das betreffende Leiterende vorgeschriebene Randbedingung stetig oder unstetig ist, wesentlich verschieden ausfallen.

Wir beschäftigen uns zunächst mit dem ersten Fall und betrachten einen flüssigen Leiter, dessen Enden stetig abgekühlt werden sollen. Da es sich für uns nur darum handelt, die Richtung der Tangente an die Schmelzkurve in ihren Endpunkten zu bestimmen, so genügt es, wenn wir uns auf den mit geringerem Rechenaufwand zu behandelnden Fall eines bloß einseitig begrenzten Leiters beschränken, da ja trotz der theoretisch unendlich großen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wärme praktisch die Temperaturverteilung in einer hinreichend kleinen Umgebung eines Endpunktes während einer kurzen Zeitspanne Δt nur von der für diesen Endpunkt vorgeschriebenen Randbedingung und den für seine Nachbarschaft angegebenen Anfangswerten abhängen wird. Die Größe von Δt bleibt dabei natürlich bis zu einem gewissen Grade willkürlich, für seine Wahl wird jedoch besonders die für die Rechnung geforderte Genauigkeit maßgebend sein.

Es sei also $\vartheta_2(x, 0) = \varphi(x)$ für $x \geq 0$ und $\vartheta_1(0, t) = f(t)$, wobei noch $\varphi(0) = f(0) = 0$, indem wir wieder mit $\vartheta = 0$ die Schmelztemperatur bezeichnen. Ferner seien $\varphi'(0)$ und $f'(0)$ vorhanden, wobei unseren Annahmen entsprechend $\varphi'(0) > 0$ und $f'(0) < 0$ sein sollen. Ist nun $x = p \cdot t$ — mit noch unbekanntem p — die Tangentengleichung der Schmelzkurve $x = s(t)$ im Punkte $x = t = 0$, dann handelt es sich doch darum, für hinreichend kleines t je ein Integral der Gleichungen

$$\frac{\partial \vartheta_i}{\partial t} = a_i^2 \frac{\partial^2 \vartheta_i}{\partial x^2} \quad (i = 1, 2)$$

zu finden, die den folgenden Bedingungen genügen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)}\ \vartheta_1(0, t) = f(t); & \vartheta_1(p\,t, t) = 0 \\ \text{b)}\ \vartheta_2(x, 0) = \varphi(x); & \vartheta_2(p\,t, t) = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16),$$

wobei noch p so bestimmt werden muß, daß

$$\lim_{t \to 0}\left(\varkappa_1 \cdot \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} - \varkappa_2 \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x}\right)_{x=pt} = \lambda \varrho p \quad \text{. . . . . (17).}$$

Das den Bedingungen b) von (16) genügende Integral läßt sich sofort angeben, wenn man in (15′) und (15″) $q_1 = 0$, $q_2 = 1$, $a_2^2\, t$ an Stelle von t und $\varphi_1(x) = \varphi(x) \cdot e^{\frac{p x}{2 a_2^2}}$ setzt, nämlich:

$$(x \geqq p t) \quad \vartheta_2(x,t) = \frac{e^{-\frac{p}{4 a_2^2}(2x - pt)}}{2 a_2 \sqrt{\pi t}} \cdot \int_0^\infty \varphi_1(\xi) \cdot \left\{ e^{-\frac{(x - pt - \xi)^2}{4 a_2^2 t}} - e^{-\frac{(x - pt + \xi)^2}{4 a_2^2 t}} \right\} d\xi \quad \text{. . . (18′).}$$

Für den Gradienten finden wir zunächst

$$\frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} = -\frac{p}{2 a_2^2} \cdot \vartheta_2(x,t) + \frac{e^{-\frac{p}{4 a_2^2}(2x - pt)}}{2 a_2 \sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \varphi_1(\xi) \cdot \left\{ -\frac{\partial}{\partial \xi}\left(e^{-\frac{(x - pt - \xi)^2}{4 a_2^2 t}}\right) - \frac{\partial}{\partial \xi}\left(e^{-\frac{(x - pt + \xi)^2}{4 a_2^2 t}}\right) \right\} d\xi$$

und daraus durch partielle Integration wegen $\varphi_1(0) = 0$:

$$\frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} = -\frac{p}{2 a_2^2} \cdot \vartheta_2(x,t) + \frac{e^{-\frac{p}{4 a_2^2}(2x - pt)}}{2 a_2 \sqrt{\pi t}} \cdot \int_0^\infty \varphi_1'(\xi) \cdot \left\{ e^{-\frac{(x - pt - \xi)^2}{4 a_2^2 t}} + e^{-\frac{(x - pt + \xi)^2}{4 a_2^2 t}} \right\} d\xi \quad \text{. . (19′).}$$

Wegen $\vartheta_2(p\,t, t) = 0$ folgt daraus für $x \to p \cdot t$:

$$\left.\frac{\partial \vartheta_2}{\partial x}\right|_{x=pt} = \frac{e^{\frac{p^2 t}{4 a_2^2}}}{a_2 \sqrt{\pi t}} \cdot \int_0^\infty \varphi_1'(\xi) \cdot e^{-\frac{\xi^2}{4 a_2^2 t}} \cdot d\xi \quad \text{. . . . . (19″),}$$

woraus, wie es ja sein muß, wegen $\varphi_1'(0) = \varphi'(0)$ folgt

$$\lim_{t \to 0} \left.\frac{\partial \vartheta_2}{\partial x}\right|_{x=pt} = \varphi'(0).$$

Zur Bestimmung von $\vartheta_1(x,t)$ denken wir uns zunächst den Leiter im festen Aggregatzustand nach links ins Unendliche fortgesetzt und bezeichnen mit $\overline{\varphi}(x) \leqq 0$ seine Anfangstemperatur, wobei $\overline{\varphi}(0) = 0$ und $\overline{\varphi}'(0)$ vorhanden sein sollen. Dann ergibt sich entsprechend wie vorher, wenn noch $\varphi_2(x) = \overline{\varphi}(x) \cdot e^{\frac{p x}{2 a_1^2}}$ gesetzt wird:

$$\vartheta_1(x,t) = \frac{e^{-\frac{p}{4 a_1^2}(2x - pt)}}{2 a_1 \sqrt{\pi t}} \cdot \int_{-\infty}^0 \varphi_2(\xi) \cdot \left\{ e^{-\frac{(x - pt - \xi)^2}{4 a_1^2 t}} - e^{-\frac{(x - pt + \xi)^2}{4 a_1^2 t}} \right\} d\xi \quad \text{. . . . (18″),}$$

woraus wieder wie vorher folgt:

$$\lim_{t \to 0} \left.\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x}\right|_{x=pt} = \overline{\varphi}'(0),$$

und dieses $\overline{\varphi}'(0)$ wollen wir nun bestimmen. Dazu bedienen wir uns am zweckmäßigsten einer geometrischen Ausdrucksweise, indem wir die gesuchte Integralfläche $\vartheta = \vartheta_1(x,t)$ in dem von der $(-x)$-Achse und der Geraden $x = p\,t$ für $t \geqq 0$ gebildeten Winkel als regulär voraussetzen, so daß ihre durch $x = t = 0$ gehende Tangentialebene die Tangenten an die Kurven $\vartheta = \overline{\varphi}(x)$ und $\vartheta = f(t)$ und auch die Gerade $x = p\,t$ enthalten muß. Ist also

$$x \cdot \overline{\varphi}'(0) + t \cdot f'(0) - \vartheta = 0$$

die Gleichung dieser Tangentialebene, so muß $\overline{\varphi}'(0) = -\frac{f'(0)}{p}$ sein, wenn sie auch die Gerade $x = p\,t$ enthalten soll. Damit wird aber (17)

$$-\varkappa_1 \cdot \frac{f'(0)}{p} - \varkappa_2 \cdot \varphi'(0) = \lambda \varrho p,$$

und diese quadratische Gleichung hat wegen $f'(0) < 0$ und $\varphi'(0) > 0$ nur eine positive Wurzel

$$p = \frac{1}{2\lambda\varrho}\left(-\varkappa_2 \cdot \varphi'(0) + \sqrt{(\varkappa_2 \cdot \varphi'(0))^2 - 4\lambda\varrho\varkappa_1 f'(0)}\right),$$

womit wir die zur Ausführung des ersten Schrittes erforderliche Richtung der Tangente der Schmelzkurve kennen.

In ähnlicher Weise ließen sich die Fälle behandeln, wo eine der anderen üblichen Randbedingungen vorgeschrieben ist, doch wollen wir darauf nicht eingehen, sondern untersuchen den

5. Beginn der Schmelzkurve bei unstetiger Randbedingung. Wir haben schon früher bemerkt, daß in diesem Fall, den wir gleich näher präzisieren werden und der in der Wirklichkeit sogar meistens die Regel bilden wird, unser Näherungsverfahren zur Konstruktion der Schmelzkurve beim ersten Schritt versagen muß. Da hier nicht der Ort ist, um auf alle mit diesem Fall verknüpften Schwierigkeiten einzugehen und Existenz- sowie Eindeutigkeitsfragen zu erörtern[11]), soll dermalen nur versucht werden, die klassischen Ansätze zu verallgemeinern. Es sei also etwa ein flüssiger Leiter mit bekannter Anfangstemperatur gegeben, dessen Enden plötzlich unter den Schmelzpunkt abgekühlt werden, so daß also dort, „momentane" Erstarrung eintreten muß, wobei wir an der auch sonst üblichen Annahme festhalten, daß eine anfänglich vorhandene Unstetigkeit der Temperatur nicht bestehenbleiben kann. Offenbar können wir uns aus denselben Gründen wie im vorhergehenden Abschnitt auf die Betrachtung eines einseitig begrenzten Leiters beschränken, dessen Ende sich bei $x = 0$ befinden und der sich in der Richtung der $(+x)$, bzw. $(-x)$-Achse erstrecken möge.

Betrachten wir zunächst den folgenden einfachen Fall, der sich mittels des von H. Weber[12]) gemachten Ansatzes für das schon von J. Stefan[13]) in Angriff genommene „Eisproblem" erledigen läßt. Es sei

$$\left.\begin{aligned} &\vartheta_1(x,0) = C_1 < 0 \text{ für } x < 0; \quad \vartheta_2(x,0) = C_2 > 0 \text{ für } x > 0 \\ &\vartheta_1(s(t),t) = \vartheta_2(s(t),t) = 0 \\ &\varkappa_1\left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x}\right)_{x=s} - \varkappa_2\left(\frac{\partial \vartheta_2}{\partial x}\right)_{x=s} = \lambda\varrho \cdot \frac{ds}{dt} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (20),$$

und wir setzen

$$\vartheta_i(x,t) = A_i + B_i \cdot \Phi\left(\frac{x}{2a_i\sqrt{t}}\right) \quad (i = 1, 2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (21),$$

wobei $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} \cdot d\xi$. Die ersten zwei Bedingungen (20) liefern dann

$$A_1 - B_1 = C_1; \quad A_2 + B_2 = C_2$$

und die dritte, wenn $s(t) = \delta \cdot \sqrt{t}$ angenommen wird:

$$A_1 + B_1 \cdot \Phi\left(\frac{\delta}{2a_1}\right) = 0; \quad A_2 + B_2 \cdot \Phi\left(\frac{\delta}{2a_2}\right) = 0,$$

woraus folgt

$$B_i = \frac{C_i}{(-1)^i - \Phi\left(\frac{\delta}{2a_i}\right)} \quad (i = 1, 2).$$

Schließlich ergibt die letzte Gl. (20) nach Multiplikation mit $\sqrt{\pi t}$ die folgende transzendente Gleichung für δ:

$$-\frac{\varkappa_1 C_1}{a_1} \cdot \frac{e^{-\frac{\delta^2}{4a_1^2}}}{1 + \Phi\left(\frac{\delta}{2a_1}\right)} - \frac{\varkappa_2 \cdot C_2}{a_2} \cdot \frac{e^{-\frac{\delta^2}{4a_2^2}}}{1 - \Phi\left(\frac{\delta}{2a_2}\right)} = \lambda\varrho\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \delta \quad . \; . \; . \; . \; . \; (22),$$

von der man leicht zeigen kann, daß sie nur eine einzige reelle Wurzel hat, wenn, wie angenommen, $C_1 < 0$ und $C_2 > 0$. Während nämlich die rechte Seite mit δ wächst, nimmt die linke für $-\infty < \delta < \infty$ von $+\infty$ nach $-\infty$ monoton ab, da man sich ohne Mühe überzeugen

[11]) Vgl. z. B. das Referat von G. Doetsch: Les équations aux dérivées partielles du type parabolique, L'enseign. math. 35 (1936), S. 42 bis 87, bes. S. 48 ff.

[12]) Riemann-Weber: Die part. Diff.-Gl d. math. Physik, 5. Aufl., Braunschweig (1912), 2. Bd., S. 118 ff.

[13]) Über die Theorie der Eisbildung, Monatsh. f. M. u. Ph., 1 (1890), S. 1 bis 6.

kann, daß ihre Ableitung nach δ nie positiv werden kann. Man braucht hierzu nur bemerken, daß für $x \geqq$ stets

$$e^{-x^2} - \sqrt{\pi} \cdot x \cdot [1 - \Phi(x)] = e^{-x^2} - 2x \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^x e^{-\xi^2} \cdot d\xi\right] = 2\int_x^\infty (\xi - x)\, e^{-\xi^2} \cdot d\xi > 0 \text{ [14]}.$$

Wenn, wie z. B. beim Wasser, ein erheblicher Unterschied in der Dichte der beiden Aggregatzustände besteht, dann hat man aus (22) zunächst das Vorzeichen von δ zu ermitteln und zur Berechnung von δ sodann ϱ_1 oder ϱ_2 für ϱ zu nehmen, je nachdem $\delta \lesseqgtr 0$. Dazu genügt offenbar die Bestimmung des Vorzeichens von $-\frac{\varkappa_1 C_1}{a_1} - \frac{\varkappa_2 C_2}{a_2}$. Verschwindet dieser Ausdruck, dann ist $\delta = 0$, also $x = 0$ und die Schmelzgrenze bleibt fest[15].

Bei der nun folgenden Betrachtung des allgemeinen Falles, bei dem also die Anfangstemperaturen des festen und des flüssigen Leiterteiles nicht konstant sein sollen, machen wir die durch das soeben erledigte Beispiel nahegelegte Annahme, daß man näherungsweise für die Schmelzkurve $x = s(t) = \delta \cdot \sqrt{t}$ setzen darf, solange t hinlänglich klein bleibt. Es wird dabei insbesonders auch die Frage zu prüfen sein, ob dann δ etwa auch von den an der Schmelzgrenze gebildeten Gradienten der Anfangstemperaturen abhängen wird oder nicht. Wir setzen also:

$$\vartheta_1(x, 0) = \varphi_1(x) \text{ für } x < 0 \text{ und } \vartheta_2(x, 0) = \varphi_2(x) \text{ für } x > 0,$$

wo aber nun $\varphi_1(0) \neq \varphi_2(0)$ und $\varphi_i'(0)$ vorhanden sein sollen, und bestimmen zunächst je ein Integral der Gleichungen

$$\frac{\partial \vartheta_i}{\partial t} = a_i^2 \frac{\partial^2 \vartheta_i}{\partial x^2} \quad (i = 1, 2),$$

so daß

$$\vartheta_i(x, 0) = \varphi_i(x) \text{ für } (-1)^i x > 0 \text{ und } \vartheta_i(\delta\sqrt{t}, t) = 0.$$

Dafür machen wir den üblichen Ansatz

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_i(x, t) = \frac{1}{2 a_i \sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \cdot \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4 a_i^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4 a_i^2 t}} \right\} d\xi \\ + \frac{(-1)^i}{2 a_i \sqrt{\pi}} \cdot \int_0^t \chi_i(\tau) \frac{x - \delta\sqrt{\tau}}{(t-\tau)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{(x - \delta\sqrt{\tau})^2}{4 a_i^2 (t-\tau)}} \cdot d\tau \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23),$$

wobei

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_i(x) \\ 0 \end{cases} \text{ je nachdem } (-1)^i x \gtrless 0$$

und die $\chi_i(\tau)$ die zum Bestehen der bekannten Diskontinuitätsformel[16] notwendigen Bedingungen erfüllen mögen. Setzen wir der Kürze wegen noch

$$\psi_i(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \varphi\left[(2 a_i \eta + \delta) \cdot \sqrt{t}\right] - \varphi\left[(2 a_i \eta - \delta) \cdot \sqrt{t}\right] \right\} e^{-\eta^2} \cdot d\eta \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (24),$$

so erhalten die zur Bestimmung der $\chi_i(\tau)$ dienenden Integralgleichungen die folgende Form:

$$\chi_i(t) + \frac{(-1)^i \delta}{2 a_i \sqrt{\pi}} \cdot \int_0^t \chi_i(\tau) \frac{\sqrt{t} - \sqrt{\tau}}{(t-\tau)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{\delta^2 (\sqrt{t} - \sqrt{\tau})}{4 a_i^2 (\sqrt{t} + \sqrt{\tau})}} \cdot d\tau = -\psi_i(t) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (25).$$

[14]) Die beim Eisproblem sich ergebende transzendente Gleichung für δ unterscheidet sich nicht wesentlich von (22), aber da Weber von einer komplizierteren Rechnung spricht, die zum Nachweis der Unität der Wurzel nötig sei, und Herr Fürth an der in Fußnote [2]) angeführten Stelle darauf auch nicht eingeht, so hielt ich diese Andeutung nicht für unangebracht.

[15]) Vgl. das auf S. 192 ff. des in Fußnote [2]) a. O. ausgeführte Beispiel, insbesonders die Gl. (18) auf S. 194.

[16]) Vgl. z. B. Goursat: Cours d'analyse, 3ième éd., T. III (1923). S. 308. Die dort geforderten Voraussetzungen können für unseren Fall etwas gemildert werden.

Führt man hier statt τ die neue Integrationsvariable

$$\sigma = \frac{\delta}{2\,a_i} \cdot \frac{\sqrt{t} - \sqrt{\tau}}{\sqrt{t - \tau}} = \frac{\delta}{2\,a_i} \sqrt{\frac{\sqrt{t} - \sqrt{\tau}}{\sqrt{t} + \sqrt{\tau}}}$$

ein, so wird

$$d\,\sigma = -\frac{\delta}{4\,a_i} \cdot \sqrt{\frac{t}{\tau}} \cdot \frac{\sqrt{t} - \sqrt{\tau}}{(t - \tau)^{3/2}}\,d\,\tau \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{\tau}{t}} = \frac{\delta^2 - 4\,a_i^2\,\sigma^2}{\delta^2 + 4\,a_i^2\,\sigma^2},$$

womit (25) übergeht in

$$\chi_i(t) + \frac{2\,(-1)^i}{\sqrt{\pi}} \cdot \int\limits_0^{\frac{\delta}{2\,a_i}} \chi_i\left[t \cdot \left(\frac{\delta^2 - 4\,a_i^2\,\sigma^2}{\delta^2 + 4\,a_i^2\,\sigma^2}\right)^2\right] \cdot \frac{\delta^2 - 4\,a_i^2\,\sigma^2}{\delta^2 + 4\,a_i^2\,\sigma^2} \cdot e^{-\sigma^2} \cdot d\,\sigma = -\psi_i(t) \quad . \; . \; . \quad (25').$$

Da weiter nach (24)

$$\psi_i(0) = (-1)^i \cdot \varphi_i(0) \cdot \Phi\left(\frac{\delta}{2\,a_i}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24'),$$

so folgt, wenn $\lim\limits_{t \to 0} \chi_i(t) = \chi_i(0)$, aus (25')

$$\chi_i(0) \cdot \left\{1 + \frac{2\,(-1)^i}{\sqrt{\pi}} \cdot \int\limits_0^{\frac{\delta}{2\,a_i}} \frac{\delta^2 - 4\,a_i^2\,\sigma^2}{\delta^2 + 4\,a_i^2\,\sigma^2} \cdot e^{-\sigma^2} \cdot d\,\sigma\right\} = (-1)^{i+1} \cdot \varphi_i(0) \cdot \Phi\left(\frac{\delta}{2\,a_i}\right) \quad . \; . \; . \; . \quad (26)$$

Um das auf der linken Seite stehende Integral auszuwerten, setzen wir $\frac{\delta}{2\,a_i} = h$ und finden zunächst

$$\frac{2\,h}{\sqrt{\pi}} \cdot \int\limits_0^1 \frac{1 - \xi^2}{1 + \xi^2} \cdot e^{-h^2 \xi^2} \cdot d\,\xi = \frac{4\,h}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^1 \frac{e^{-h^2 \xi^2}}{1 + \xi^2} \cdot d\,\xi - \Phi(h).$$

Setzen wir ferner

$$G(x) = \int\limits_0^1 \frac{e^{-x\xi^2}}{1 + \xi^2} \cdot d\,\xi,$$

so wird

$$G'(x) - G(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}} \cdot \Phi(\sqrt{x}).$$

Derselben Differentialgleichung genügt aber auch

$$\overline{G}(x) = \frac{\pi}{4}\,e^x \cdot [1 - (\Phi(\sqrt{x}))^2],$$

und da $G(0) = \overline{G}(0) = \frac{\pi}{4}$, so ist

$$G(x) = \frac{\pi}{4} \cdot e^x \cdot [1 - (\Phi(\sqrt{x}))^2]\;^{17)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27).$$

Differenziert man nun (25') nach t und ist

$$\lim_{t \to 0} [\sqrt{t} \cdot \chi_i'(t)] = \varepsilon_i \neq 0,$$

so folgt aus (24) für $t \to 0$:

$$\varepsilon_i \cdot \left\{1 + \frac{2\,(-1)^i}{\sqrt{\pi}} \cdot \int\limits_0^{\frac{\delta}{2\,a_i}} \left(\frac{\delta^2 - 4\,a_i^2\,\sigma^2}{\delta^2 + 4\,a_i^2\,\sigma^2}\right)^3 \cdot e^{-\sigma^2} \cdot d\,\sigma = \frac{\delta}{2} \cdot \varphi_i'(0) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26'),\right.$$

[17] Dieses Integral $G(x)$, für welches schon Raabe eine Reihenentwicklung angegeben hat (Journ. f. Math. 48 (1854) S. 141), läßt sich also durch „bekannte" Funktionen darstellen.

woraus man ersehen kann, daß man für kleines t näherungsweise $\chi_i(t) \sim \chi_i(0) + \varepsilon_i \sqrt{t}$ setzen darf, wenn $\lim\limits_{x \to \mp 0} \varphi_i'(x) = \varphi_i'(0) \neq 0$. Wäre dagegen erst $\lim\limits_{x \to \mp 0} [(\mp x)^{\nu} \varphi_i'(x)] \neq 0$ und endlich für $\nu_i > 0$, so würde dies die folgenden Überlegungen erheblich erschweren, doch wollen wir von diesem praktisch ja ohnehin bedeutungslosem Falle absehen.

Nach dieser knappen Rechtfertigung des für die Schmelzkurve gemachten Ansatzes $x = \delta \cdot \sqrt{t}$ haben wir nun die zur Bestimmung von δ erforderliche Gleichung nach (1) herzustellen, die trotz ihrer sehr komplizierten Form sich mit der Gl. (22) identisch erweisen wird, indem die $\chi_i(0)$ herausfallen werden. Zur Berechnung von $\lim\limits_{x \to \delta \sqrt{t} \mp 0} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial x}$ bilden wir zunächst [18])

$$\frac{\partial \vartheta_i}{\partial x} = -\frac{1}{2 a_i \sqrt{\pi t}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4 a_i^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4 a_i^2 t}} \right] d\xi$$

$$-\frac{(-1)^i}{a_i \sqrt{\pi}} \cdot \left\{ \frac{\chi_i(0)}{\sqrt{t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4 a_i^2 t}} + \int\limits_0^t \left[\frac{\delta \cdot \chi_i(\tau)}{4 a_i^2 \sqrt{\tau}} \cdot \frac{x - \delta \sqrt{\tau}}{t - \tau} + \chi_i'(\tau) \right] \frac{e^{-\frac{(x - \delta \sqrt{\tau})^2}{4 a_i^2 (t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}} \cdot d\tau \right\},$$

wo man wieder leicht zeigen kann, daß für $t > 0$, wenn $x \to \delta \sqrt{t} \mp 0$, für das zweite Integral rechts die Diskontinuitätsformel angewendet werden darf. Setzt man die so gefundenen Ausdrücke für $\lim\limits_{x \to \delta \sqrt{t} - 0} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x}$ und $\lim\limits_{x \to \delta \sqrt{t} + 0} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x}$ in (1) ein, so erhält man nach Multiplikation mit $\sqrt{t}$ für $t \to 0$:

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{\varkappa_1}{a_1} \left\{ \frac{\varphi_1(0)}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{\delta^2}{4 a_1^2}} + \chi_1(0) \cdot \left[-\frac{e^{-\frac{\delta^2}{4 a_1^2}}}{\sqrt{\pi}} + \frac{\delta}{2 a_1} \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{\delta}{2 a_1}\right)\right) \right] \right\} \\ &-\frac{\varkappa_2}{a_2} \left\{ \frac{\varphi_2(0)}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{\delta^2}{4 a_2^2}} - \chi_2(0) \cdot \left[\frac{e^{-\frac{\delta^2}{4 a_2^2}}}{\sqrt{\pi}} + \frac{\delta}{2 a_2} \cdot \left(1 + \Phi\left(\frac{\delta}{2 a_2}\right)\right) \right] \right\} = \lambda \varrho \cdot \frac{\delta}{2} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (28).$$

Da hier jedoch die $\varphi_i'(0)$ gar nicht vorkommen, so muß diese Gleichung für δ mit (22) identisch sein, wovon man sich auf Grund der Gleichungen (26) und (27) sofort überzeugen kann, wenn man noch $\varphi_1(0) = C_1$ und $\varphi_2(0) = C_2$ setzt, so daß also bei stetigen $\varphi_i'(x)$ der Faktor δ nur von den $\varphi_i(0)$ allein abhängt und nicht auch von den $\varphi_i'(0)$.

Hat man also aus (28) bzw. (22) den Faktor δ berechnet, dann kann man nach (26) und (26') die $\chi_i(0)$ bzw. ε_i bestimmen und damit nach (23) die nach einem hinreichend kleinen t vorhandenen Temperaturverteilungen im festen und flüssigen Teile des Leiters, worauf man den folgenden Schritt nach der allgemeinen Näherungsmethode ausführen kann. Es sei noch besonders darauf hingewiesen, daß die ε_i nur dann verschwinden würden, also in (23) die $\chi_i(\tau)$ nur dann in erster Näherung durch die Konstanten $\chi_i(0)$ ersetzt werden dürfen, wenn die $\varphi_i'(0) = 0$.

Auf Grund dieser Ergebnisse kann man nun auch die Verallgemeinerung des Stefanschen Eisproblemes erledigen, bei dem die Anfangstemperatur $\vartheta_2(x, 0) = \varphi_2(x)$ mit $\varphi_2(0) > 0$ eines einseitig begrenzten flüssigen Leiters gegeben ist, dessen linkes bei $x = 0$ befindliches Ende plötzlich abgekühlt wird, so daß $\vartheta_1(0, t) = f(t)$, wobei $f(0) < 0$ und $\lim\limits_{t \to 0} [\sqrt{t} \cdot f'(t)]$ vorhanden sein sollen. Wir führen diese Aufgabe auf den früher betrachteten Fall zurück, indem wir an das Ende unseres Leiters einen nach links unbegrenzten im festen Aggregatzustande befindlichen Leiter aus demselben Material anlegen, dessen uns unbekannte Anfangstemperatur $\vartheta_1(x, 0) = \varphi_1(x)$ sein soll. Setzen wir für genügend kleines t für die Schmelzkurve wieder $x = \delta \cdot \sqrt{t}$, so können wir aber jetzt nach (22) den Faktor δ nicht sofort berechnen, da wir $\varphi_1(0)$ noch nicht kennen, denn es wird im allgemeinen ja $\varphi_1(0) \neq f(0)$ ausfallen. Es folgt nämlich aus (23), wenn wir $h = \frac{\delta}{2 a_1}$ setzen, für $t > 0$:

$$\vartheta_1(0, t) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \chi_1(\tau) \cdot e^{-\frac{h^2 \tau}{t - \tau}} \cdot \frac{\sqrt{\tau} \cdot d\tau}{(t-\tau)^{3/2}},$$

---

[18]) Vgl. M. Gevrey: Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique, Journ. de math. (VI), 9 (1913), S. 320.

oder, wenn wir die neue Integrationsvariable $\sigma = \frac{\tau}{t}$ einführen:

$$\vartheta_1(0, t) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^1 \chi_1(t \cdot \sigma) \cdot e^{-\frac{h^2 \sigma}{1-\sigma}} \cdot \frac{\sqrt{\sigma} \cdot d\sigma}{(1-\sigma)^{3/2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (29).$$

Daraus folgt aber, wenn $\lim_{t \to 0} \chi_1(t \cdot \sigma) = \chi_1(0)$:

$$\lim_{t \to 0} \vartheta_1(0, t) = \chi_1(0) \cdot \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^1 e^{-\frac{h^2 \sigma}{1-\sigma}} \cdot \frac{\sqrt{\sigma} \cdot d\sigma}{(1-\sigma)^{3/2}} = f(0),$$

und wenn man die neue Integrationsvariable $\xi = \sqrt{\frac{\sigma}{1-\sigma}}$ einführt, erhält man daraus nach kurzer Rechnung

$$\chi_1(0) \cdot \{1 - h \cdot \sqrt{\pi}\, e^{h^2} \cdot [1 - \Phi(h)]\} = f(0) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (29').$$

Anderseits ergibt sich aus (26) mit Berücksichtigung von (27) nach einigen einfachen Umformungen

$$\chi_1(0) \cdot [1 + \Phi(h)] \cdot [1 - h \cdot \sqrt{\pi} \cdot e^{h^2} \cdot (1 - \Phi(h))] = \varphi_1(0) \cdot \Phi(h),$$

so daß man nach (29') für $\varphi_1(0)$ den folgenden Ausdruck erhält:

$$\varphi_1(0) = \frac{1 + \Phi(h)}{\Phi(h)} \cdot f(0).$$

Setzt man dies für $\varphi_1(0)$ an Stelle von C_1 in (22) ein, so bekommt man zur Bestimmung von δ die folgende transzendente Gleichung:

$$-\frac{\varkappa_1}{a_1} \cdot f(0) \cdot \frac{e^{-\frac{\delta^2}{4 a_1^2}}}{\Phi\left(\frac{\delta}{2 a_1}\right)} - \frac{\varkappa_2}{a_2} \cdot \varphi_2(0) \cdot \frac{e^{-\frac{\delta^2}{4 a_2^2}}}{1 - \Phi\left(\frac{\delta}{2 a_2}\right)} = \lambda \varrho \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \delta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22'),$$

die genau mit der für das Stefansche Eisproblem sich ergebenden Gleichung übereinstimmt[19]). Hat man δ aus (22') berechnet, so findet man $\chi_1(0)$ aus (29'), aber wie wir schon oben bemerkt hatten, genügt es im allgemeinen nicht, in (23) die $\chi_1(\tau)$ einfach durch $\chi_i(0)$ zu ersetzen, wir müssen also auch noch die ε_i berechnen. Da uns $\varphi_2'(0)$ und auch δ bekannt sind, ist ε_2 durch (26') bestimmt; um aber ε_1 zu finden, müßten wir zuerst $\varphi_1'(0)$ kennen. Deshalb bilden wir zunächst aus (29):

$$\left.\frac{\partial \vartheta_1}{\partial t}\right|_{x=0} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^1 \chi_1'(t \cdot \sigma) \cdot e^{-\frac{h^2 \sigma}{1-\sigma}} \left(\frac{\sigma}{1-\sigma}\right)^{3/2} \cdot d\sigma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30).$$

Nimmt man nun wieder wie oben an, daß $\lim_{t \to 0} [\sqrt{t} \cdot \chi_1'(t)] = \varepsilon_1$, so folgt aus (30), wenn man mit $\sqrt{t}$ multipliziert, für $t \to 0$:

$$\lim_{t \to 0} \left[\sqrt{t}\, \left.\frac{\partial \vartheta_1}{\partial t}\right|_{x=0}\right] = \varepsilon_1 \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^1 e^{-\frac{h^2 \cdot \sigma}{1-\sigma}} \cdot \left(\frac{\sigma}{1-\sigma}\right)^{3/2} \cdot d\sigma = \lim_{t \to 0} [\sqrt{t} \cdot f'(t)]^{20)} \quad . \; . \; . \; . \quad (30').$$

Ist also $\lim_{t \to 0} [\sqrt{t} \cdot f'(t)] = 0$, dann ist auch $\varepsilon_1 = 0$ und man kann für kleines t in (23) näherungsweise $\chi_1(\tau) = \chi_1(0)$ setzen, während man sonst für $\chi_1(\tau) = \chi_1(0) + \varepsilon_1 \cdot \sqrt{\tau}$ nehmen muß.

Hat man nun ε_1 aus (30') bestimmt, so ergibt sich $\varphi_1'(0)$ aus (26'), und damit können wir für $\varphi_1(\xi) \sim \varphi_1(0) + \xi \cdot \varphi_1'(0)$ nach (23) für hinreichend kleines t und $0 \leq x \leq \delta \cdot \sqrt{t}$ die in dem während dieser kurzen Zeitspanne erstarrten Teile vorhandene Temperaturverteilung berechnen und dann den nächsten Schritt nach der im Abschnitte 3 angegebenen Methode ausführen.

[19]) Gl. (52) auf S. 222 des in Fußnote [2]) a. O.

[20]) Für das in (30) stehende Integral ließe sich sowie für das in (26') eine Darstellung durch bekannte Funktionen leicht finden, aber da sich unbequeme Ausdrücke ergeben, so sehen wir davon ab.

Der Fall, wo ein flüssiger Leiter plötzlich an einen festen stößt, läßt sich noch dahin verallgemeinern, daß die beiden Leiter nicht aus dem gleichen Material bestehen und insbesonders verschiedene Schmelzpunkte besitzen, doch wollen wir trotz des praktischen Interesses, das dieser Fall besitzt, dermalen uns nicht mit ihm beschäftigen.

6. Ausgleich der durch die Tangentenapproximation der Schmelzkurve entstehenden Fehler. Es wurde bereits bemerkt, daß unser Näherungsverfahren das Bestreben besitzt, die infolge des Ersatzes der Schmelzkurve durch ihre Tangenten entstehenden Fehler von selber teilweise auszugleichen, und dies wollen wir nun nachweisen, wobei wir uns aus denselben Gründen wie in den beiden vorangehenden Abschnitten auf einen unendlichen Leiter beschränken können. Es befinde sich die Schmelzgrenze zur Zeit $t=0$ bei $x=0$ und es sei $\vartheta_1(x,0)=\varphi_1(x)<0$ für $x<0$ und $\vartheta_2(x,0)=\varphi_2(x)>0$ für $x>0$, wobei die $\varphi_i(x)$ zweimal differenzierbar sein sollen. Die „wahre" Schmelzkurve $x=s(t)$ (Bild 1) schneide die Parallele zur x-Achse im Abstande $\Delta t>0$ im Punkte $\bar{Q}$, ihre Tangente in 0 dagegen dieselbe Parallele in einem weiter rechts liegenden Punkt Q, den also unser Näherungsverfahren als einen Punkt der angenäherten Schmelzkurve statt $\bar{Q}$ liefern würde. Hätten wir die Schmelzkurve anstatt durch ihre Tangente $0\,Q$ durch ihre Sehne $0\,\bar{Q}$ approximiert, so wäre die Lage der Schmelzgrenze zur Zeit Δt natürlich richtig bestimmt, aber die nach der in Abschnitt 3 entwickelten Methode berechnete Temperaturverteilung würde von der „wahren" doch ein wenig abweichen, wenn statt des Bogens $0\,\bar{Q}$ die Sehne $0\,\bar{Q}$ genommen würde. Es seien durch die Kurven $\bar{\vartheta}_1$ und $\bar{\vartheta}_2$ die Temperaturverteilungen dargestellt, die man etwa nach (18″) und (18′) gefunden hätte, wenn man das dort stehende p durch das $\bar{p}$ in der Gleichung $x=\bar{p}\,t$ der Sehne $0\,\bar{Q}$ ersetzt hätte. Da uns aber $\bar{p}$ unbekannt ist, so setzen wir für das p in (18″) und (18′) das in der Gleichung $x=p\cdot t$ der Tangente $0\,Q$ vorkommende p und erhalten so die Temperaturverteilungen, die durch die Kurven ϑ_1 und ϑ_2 dargestellt sind. Während wir aus $\bar{\vartheta}_1$ und $\bar{\vartheta}_2$ nach (1) mit sehr großer Genauigkeit die Tangente der „wahren" Schmelzkurve bestimmen könnten[21]), erhalten wir aus ϑ_1 und ϑ_2 nach (1) natürlich überhaupt keine Tangente der „wahren" Schmelzkurve $x=s(t)$, sondern eine Gerade: $x=p\cdot\Delta t+p^*\cdot(t-\Delta t)$, wobei p^* aus

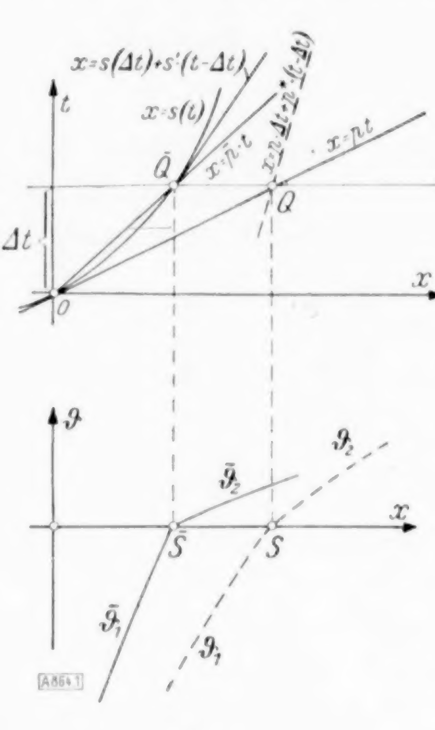


Bild 1.

$$\left(\varkappa_1\frac{\partial\vartheta_1}{\partial x}-\varkappa_2\frac{\partial\vartheta_2}{\partial x}\right)_{x=p\cdot\Delta t}=\lambda\,\varrho\,p^*$$

zu berechnen ist. Aber diese Gerade ist steiler als die Tangente der „wahren" Schmelzkurve, so daß wir beim folgenden Schritte doch wieder näher an die „wahre" Schmelzkurve heranrücken, ja sie unter Umständen sogar kreuzen können, worauf beim folgenden Schritte der Fehlerausgleich natürlich im entgegengesetzten Sinne stattfinden würde. Um dies einzusehen, genügt es offenbar, wenn wir zeigen, daß für ein hinreichend kleines t mit wachsendem p — wenn also die Gerade $x=p\,t$ einen spitzeren Winkel mit der x-Achse bildet! — der Gradient $\dfrac{\partial\vartheta_1}{\partial x}$ abnimmt, $\dfrac{\partial\vartheta_2}{\partial x}$ dagegen zunimmt.

Setzt man nämlich in Übereinstimmung mit Bild 1 $\bar{\varphi}_i(x)=e^{\frac{p\,x}{2\,a_i^2}}\cdot\varphi_i(x)$ für $(-1)^i\cdot x>0$, so wird zunächst nach (18″)

$$\vartheta_1(x,t)=\frac{e^{-\frac{p}{4\,a_1^2}(2x-p\,t)}}{2\,a_1\sqrt{\pi\,t}}\cdot\int\limits_{-\infty}^{0}\bar{\varphi}_1(\xi)\cdot\left\{e^{-\frac{(x-p\,t-\xi)^2}{4\,a_1^2\,t}}-e^{-\frac{(x-p\,t+\xi)^2}{4\,a_1^2\,t}}\right\}\cdot d\,\xi,$$

und man findet nach einfacher Rechnung

$$\left.\frac{\partial\vartheta_1}{\partial x}\right|_{x=p\,t}=\frac{1}{a_1\sqrt{\pi\,t}}\cdot\int\limits_{-\infty}^{0}\left[\frac{p}{2\,a_1^2}\cdot\varphi_1(\xi)+\varphi_1'(\xi)\right]\cdot e^{-\frac{(p\,t-\xi)^2}{4\,a_1^2\,t}}\cdot d\,\xi\,.$$

[21]) Der nur geringfügige Unterschied rührt davon her, daß an Stelle des Bogens $0\,\bar{Q}$ die Sehne $0\,\bar{Q}$ als rechter bzw. linker Bereichrand bei der Berechnung von $\bar{\vartheta}_1$ bzw. $\bar{\vartheta}_2$ benützt würde.

Damit wird nun

$$\left.\frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial x\,\partial p}\right|_{x=pt} = \frac{1}{a_1\sqrt{\pi t}} \cdot \int_{-\infty}^{0} \left\{ \frac{\varphi_1(\xi)}{2a_1^2}\, e^{-\frac{(pt-\xi)^2}{4a_1^2 t}} - t \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-\frac{(pt-\xi)^2}{4a_1^2 t}}\right) \cdot \left[\frac{p}{2a_1^2}\cdot\varphi_1(\xi) + \varphi_1'(\xi)\right]\right\} d\xi,$$

woraus durch partielle Integration wegen $\varphi_1(0) = 0$ folgt

$$\left.\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x\,\partial p}\right|_{x=pt} = \frac{1}{2a_1^3\sqrt{\pi t}} \int_{\infty}^{0} \varphi_1(\xi)\cdot e^{-\frac{(pt-\xi)^2}{4a_1^2 t}} \cdot d\xi$$

$$+ \frac{1}{a_1}\cdot\sqrt{\frac{t}{\pi}} \left\{ -\varphi_1'(0)\cdot e^{-\frac{p^2 t}{4a_1^2}} + \int_{-\infty}^{0} \left[\frac{p}{2a_1^2}\cdot\varphi_1'(\xi) + \varphi_1''(\xi)\right] e^{-\frac{(pt-\xi)^2}{4a_1^2 t}}\, d\xi \right\}.$$

Setzt man im ersten Integral der rechten Seite $\xi = pt + 2a\sqrt{t}\cdot\eta$, so sieht man, daß es für $t \to 0$ ebenfalls wie $\sqrt{t}$ verschwindet. Zieht man also den Faktor $\sqrt{t}$ aus allen Gliedern der rechten Seite heraus, dann werden die für $t \to 0$ endlich bleibenden Terme negativ, also nimmt $\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x}$ für genügend kleines t mit wachsendem p ab. In ganz entsprechender Weise zeigt man, daß $\frac{\partial \vartheta_2}{\partial x}$ für kleines t mit wachsendem p zunimmt, womit aber das Bestehen der erwähnten vorteilhaften Eigenschaft unseres Näherungsverfahrens nachgewiesen ist. Übrigens ist der soeben bewiesene Sachverhalt ja auch anschaulich sofort einleuchtend, indem ein zu schnelles Fortschreiten der Schmelzgrenze nach rechts offenbar eine Verkleinerung von $\left.\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x}\right|_S$ und eine Vergrößerung von $\left.\frac{\partial \vartheta_2}{\partial x}\right|_S$ nach sich ziehen muß.

7. Ein Beispiel. Da sich das von Herrn Lachmann durchgerechnete Beispiel für Kupfer infolge eines dabei unterlaufenen Versehens[22]) zu einem Vergleich der von ihm entwickelten Methode mit der unsrigen leider nicht heranziehen läßt und ich mir auch die Wärme- und Temperaturleitzahl für Kupferschmelze nicht verschaffen konnte, so wollen wir unsere Methode auf einen $l = 10$ cm langen aus geschmolzenem Zink bestehenden Leiter anwenden. Seine Anfangstemperatur sei 520^0 C und seine Enden mögen plötzlich auf 20^0 C abgekühlt werden Setzen wir die Schmelztemperatur des Zinkes gleich 420^0 C, so wird mit der in (22) benützten Bezeichnung

$$C_1 = -400; \qquad C_2 = 100.$$

Ferner sind die Schmelzwärme $\lambda = 26{,}6\ \frac{\text{cal}}{g}$, die Dichten $\varrho_1 = 7{,}1$ und $\varrho_2 = 6{,}9$, wofür wir im Mittel $\varrho = 7{,}0$ wählen, so daß $\lambda\,\varrho = 186$ genommen werden kann. Für die spezifischen Wärmen setzen wir

$$c_1 = 0{,}096\ \frac{\text{cal}}{g^0}, \qquad c_2 = 0{,}121\ \frac{\text{cal}}{g^0}$$

und für die Wärmeleitzahlen

$$\varkappa_1 = 0{,}245\ \frac{\text{cal}}{\text{cm sec}^0}, \qquad \varkappa_2 = 0{,}137\ \frac{\text{cal}}{\text{cm sec}^0},$$

womit sich für die Temperaturleitzahlen die folgenden Werte ergeben:

$$\frac{\varkappa_1}{c_1\varrho_1} = a_1^2 = 0{,}360\ \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}, \qquad \frac{\varkappa_2}{c_2\varrho_2} = a_2^2 = 0{,}164\ \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}.$$

Die Endstücke der in unserem zwar für die Rechnung aber nicht im Wesen durch Symmetrie sehr vereinfachten Problem auftretenden Schmelzkurve wollen wir durch die Parabeln $X = \delta\cdot\sqrt{T}$ bzw. $X = 10 - \delta\cdot\sqrt{T}$ approximieren. Wir nehmen dabei an, daß sich der Leiter nach der jeweils von dem betreffenden Ende ins Innere weisenden Richtung ins Unendliche erstreckt, so daß wir den folgenden Ansatz[23]) für die im festen und flüssigen Teile sich einstellenden Temperaturverteilungen am linken Ende machen können:

[22]) Vgl. meine Zuschrift an den Herausgeber der ZAMM 17 (1937), S. 379 f.
[23]) Vgl. Gl. (49), (51) und (52) auf S. 221 des in Fußnote[2]) a. O.

$$\left.\begin{array}{l}\vartheta_1 = A_1 + B_1 \cdot \Phi\left(\frac{X}{2\,a_1\sqrt{T}}\right); \qquad \vartheta_2 = A_2 + B_2 \cdot \Phi\left(\frac{X}{2\,a_2\sqrt{T}}\right) \\ A_1 = C_1; \quad B_1 = -\frac{C_1}{\Phi\left(\frac{\delta}{2\,a_1}\right)}; \quad A_2 = -\frac{C_2 \cdot \Phi\left(\frac{\delta}{2\,a_2}\right)}{1-\Phi\left(\frac{\delta}{2\,a_2}\right)}; \quad B_2 = \frac{C_2}{1-\Phi\left(\frac{\delta}{2\,a_2}\right)}\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (31).$$

Dabei bedeutet δ die einzige positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{\varkappa_1}{a_1}\,\frac{C_1\,e^{-\frac{\delta^2}{4\,a_1^2}}}{\Phi\left(\frac{\delta}{2\,a_1}\right)} + \frac{\varkappa_2}{a_2}\cdot\frac{C_2\,e^{-\frac{\delta^2}{4\,a_2^2}}}{1-\Phi\left(\frac{\delta}{2\,a_2}\right)} = -\lambda\,\varrho\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\delta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22'),$$

für die man hinreichend genau $\delta = 0{,}7144$ findet. Damit erhält man für die für kleines T vorhandenen Temperaturverteilungen die folgenden Ausdrücke:

$$\left.\begin{array}{ll}(X \leqq \delta\cdot\sqrt{T}) & \vartheta_1\,(X,T) = -400 + 666{,}56\cdot\Phi\left(\frac{X}{1{,}2\sqrt{T}}\right) \\ (X \geqq \delta\cdot\sqrt{T}) & \vartheta_2\,(X,T) = -370{,}81 + 470{,}81\cdot\Phi\left(\frac{X}{0{,}81\sqrt{T}}\right)\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32).$$

Um zu prüfen, bis zu welchem Werte von T wir (32) benützen dürfen, wenn der Fehler von ϑ_2 bei $X = 5$ cm kleiner als $0{,}1^\circ$ C sein soll, berechnen wir die Temperaturverteilung in einem Leiter mit $a^2 = 0{,}30$, für den $\vartheta\,(X,0) = 0^\circ$ C, dessen Länge $l = 10$ cm und dessen Enden plötzlich auf -500° C abgekühlt werden, aber ohne daß sich sein Aggregatzustand dabei ändert. Da also hier keine Schmelzwärme frei wird und obendrein $a^2 > a_2^2$, so muß $\vartheta\left(\frac{l}{2},T\right) < \vartheta_2\left(\frac{l}{2},T\right) - 100$. Nun ist aber bekanntlich

$$\vartheta\,(X,T) = -500\cdot\left\{2 - \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\Phi\left(\frac{X+2\,n\,l}{2\,a\sqrt{T}}\right) + \Phi\left(\frac{l-X-2\,n\,l}{2\,a\sqrt{T}}\right)\right]\right\}.$$

Damit also $\left|\vartheta\left(\frac{l}{2},T\right)\right| \leqq 0{,}1$ wird, muß T aus der folgenden Gleichung bestimmt werden:

$$\left|\vartheta\left(\frac{l}{2},T\right)\right| = 1000\cdot\left[1 - \Phi\left(\frac{l}{4\,a\sqrt{T}}\right) + \Phi\left(\frac{3\,l}{4\,a\sqrt{T}}\right) - \Phi\left(\frac{5\,l}{4\,a\sqrt{T}}\right) + - \cdots\right] = 0{,}1\,,$$

oder hinreichend genau:

$$1 - \Phi\left(\frac{10}{2{,}4\cdot\sqrt{T}}\right) = 10^{-4}.$$

Daraus folgt, daß bis $T_0 = 2{,}25$ sec die Gl. (32) sicher noch benützbar sind, da

$$\Phi\left(\frac{10}{2{,}4\cdot 1{,}5}\right) = \Phi\,(2{,}78) = 0{,}9999156.$$

Wir haben somit insbesonders für $T_0 = 2{,}25$ sec und $q_2 = \delta\cdot\sqrt{T_0} = 1{,}0716$ cm die folgenden Temperaturverteilungen:

$$\left.\begin{array}{ll}(0 \leqq X \leqq 1{,}0716;\ 8{,}9284 \leqq X \leqq 10{,}0) & \vartheta_1\,(X) = -400 + 666{,}56\cdot\Phi\,(0{,}55556\cdot X) \\ (1{,}0716 \leqq X \leqq 8{,}9284) & \vartheta_2\,(X) = -370{,}81 + 470{,}81\cdot\Phi\,(0{,}82304\cdot X)\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (32').$$

Zur Ausführung des folgenden Schrittes setzen wir zunächst für den erstarrten Teil $-\ q_1 = 0,\ q_2 = \delta\sqrt{T_0}\ -$ nach (5′) die dimensionslosen Größen x und t an Stelle von X und T:

$$X = q_2\cdot x = 1{,}0716\cdot x \quad \text{und} \quad T = \left(\frac{q_2}{a_1}\right)^2\cdot t = 3{,}1898\cdot t,$$

so daß

$$\vartheta_1\,(x) = \varphi\,(x) = -400 + 666{,}56\cdot\Phi\,(0{,}59533\cdot x) \quad (0 \leqq x \leqq 1).$$

Mit dieser Funktion $\varphi\,(x)$ haben wir nun die folgende Randwertaufgabe nach (6′) zu lösen:

$$\text{a) } \vartheta\,(x,0) = \varphi\,(x) \text{ für } 0 \leqq x \leqq 1; \quad \text{b) } \vartheta\,(0,t) = -400,\ \vartheta\,(1 + p_2'\,t, t) = 0,$$

wobei

$$p_2' = \frac{q_2}{a_1^2}\cdot p_2 = \frac{q_2}{a_1^2}\cdot\frac{\delta}{2\sqrt{T_0}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{a_1}\right)^2 = 0{,}70885.$$

Ferner wird hier nach (9) $\alpha = -\frac{1}{p_2{}'}, = -1,4107$ und $\beta = 0$. Wegen $\vartheta(0, t) \neq 0$ ist aber nun die Formel (14) noch zu ergänzen, indem hier zum Faltungsintegral $\chi_1 \star G(x')$ in (13') auf der rechten Seite noch die Summe

$$-400 \int_0^{t'} \sqrt{\frac{-\alpha^2}{t' - \tau + \alpha}} \cdot G(\tau, x') = -400 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n$$

hinzuzufügen ist. Setzt man in

$$I_n = \frac{\alpha \cdot (2n + x')}{2\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{t'} \frac{e^{-\frac{(2n+x')^2}{4\tau}}}{\tau^{3/2}\sqrt{\tau - \alpha - t'}} d\tau$$

statt τ die neue Integrationsvariable

$$\xi = \frac{2n + x'}{2} \cdot \sqrt{\frac{\alpha + t' - \tau}{\tau(\alpha + t')}} \quad \text{und} \quad z_n = \frac{2n + x'}{2} \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{t' \cdot (\alpha + t')}} = (2n + x') \cdot \frac{\sqrt{t}}{2t'},$$

so erhält man

$$I_n = \frac{2\alpha \cdot e^{-\frac{(2n+x)^2}{4(\alpha+t')}}}{\sqrt{-\pi \cdot (\alpha + t')}} \cdot \int_{z_n}^{\infty \cdot \operatorname{sgn}(n)} e^{-\xi^2} \cdot d\xi$$

und somit an Stelle von (14)

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_1(x', t') = {} & -\frac{800}{\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n \cdot (n + 2x') \cdot \frac{t}{4\alpha t'}} \cdot \int_{z_n}^{\infty \cdot \operatorname{sgn}(n)} e^{-\xi^2} \cdot d\xi \\ & + \frac{e^{\frac{x'^2}{4(\alpha+t')}}}{2\sqrt{\pi t}} \cdot \int_0^1 \varphi(\xi) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(e^{-\frac{(2n + x' - \xi)^2}{4t'}} - e^{-\frac{(2n + x' - 1 + \xi^2)}{4t'}} \right) d\xi \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (14')$$

für die Temperaturverteilung im erstarrten Teile des Leiters, also für $0 \leq X \leq q_2 + p_2 \cdot \Delta t$, bzw. $0 \leq x' \leq 1$, wo die Werte von t und t' gegeben sind durch: $\Delta T = \left(\frac{q_2}{a_1}\right)^2 \cdot t = \left(\frac{q_2}{a_1}\right)^2 \cdot \frac{\alpha \cdot t'}{\alpha + t'}$.

Für die Temperaturverteilung in der Schmelze — $q_1 = \delta\sqrt{T_0}$, $q_2 = 10 - q_1$ — findet man nach Einführung der dimensionslosen Variablen x, t vermöge

$$X = (10 - 2q_1)x + q_1 = 7,8568 \cdot x + 1,0716; \quad T = \left(\frac{10 - 2q_1}{a_2}\right)^2 \cdot t = 376,41 \cdot t$$

zunächst zur Zeit $T_0 = 2,25$ sec:

$$\vartheta_2(x) = \varphi(x) = -370,81 + 470,81 \cdot \Phi(6,4665\,x + 0,88196) \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Damit ist nun die folgende Randwertaufgabe zu lösen:

$$\text{a)}\ \vartheta(x, 0) = \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq 1); \qquad \text{b)}\ \vartheta(p_1{}'\,t, t) = \vartheta(1 + p_2{}' \cdot t, t) = 0,$$

wobei wegen $p_1 = -p_2 = \frac{\delta}{2\sqrt{T_0}}$ und $p_i{}' = \frac{10 - q_1}{a_2{}^2} p_i$ zunächst folgt $p_1{}' = -p_2{}' = 11,408$ und nach (9) $\alpha = \frac{1}{2p_1{}'}, = 0,04383$ und $\beta = \frac{1}{2}$, und damit kann nach (14) sofort für dasselbe ΔT wie vorher $\vartheta_2(x', t')$ berechnet werden, wobei $q_1 + p_1 \cdot \Delta T \leq X \leq 10 - q_1 - p_1 \cdot \Delta T$, bzw. $0 \leq x' \leq 1$ und t und t' bestimmt sind durch: $\Delta T = \left(\frac{10 - 2q_1}{a_2}\right)^2 \cdot t = \left(\frac{10 - 2q_1}{a_2}\right)^2 \cdot \frac{\alpha \cdot t'}{\alpha + t'}$. Wegen der Symmetrie unseres Problemes braucht man $\vartheta_2(x', t')$ wirklich nur für $0 \leq x' \leq \frac{1}{2}$ auszuwerten.

Nun hat man nach (1) den für den nächsten Schritt erforderlichen Wert von $\frac{d\,s}{d\,T}$ für $T = T_0 + \varDelta\,T$ zu bestimmen, wozu man $\frac{\partial\,\vartheta_1}{\partial\,X}$ und $\frac{\partial\,\vartheta_2}{\partial\,X}$ kennen muß. Dazu beachten wir, daß

$$\frac{\partial\,\vartheta_1}{\partial\,X} = \frac{\partial\,\vartheta_1}{\partial\,x'}\cdot\frac{\partial\,x'}{\partial\,x}\cdot\frac{\partial\,x}{\partial\,X} = \frac{\dfrac{\partial\,\vartheta_1}{\partial\,x'}}{q_2 + p_2\cdot\varDelta\,T},$$

und entsprechend, wenn nun q_2 und p_2 durch q_1 und p_1 ersetzt werden:

$$\frac{\partial\,\vartheta_2}{\partial\,X} = \frac{\partial\,\vartheta_2}{\partial\,x'}\cdot\frac{\partial\,x'}{\partial\,x}\cdot\frac{\partial\,x}{\partial\,X} = \frac{\dfrac{\partial\,\vartheta_2}{\partial\,x'}}{10 - 2\,q_1 - 2\,p_1\cdot\varDelta\,T},$$

wodurch einfach die Verlängerung des festen bzw. die Verkürzung des flüssigen Leiterstückes zum Ausdruck kommt. Die Berechnung der $\frac{\partial\,\vartheta_i}{\partial\,x'}$ aus den Formeln, die sich aus (14') bzw. (14) durch Differentiation nach x' bilden lassen, für $x' = 1$ bzw. $x' = 0$ würde zwar im Vergleich zu der ohnehin zu leistenden Rechenarbeit keine bedeutende Mühe erfordern, doch findet man sie mit der hier angemessenen Genauigkeit bequemer durch numerische Differentiation der $\vartheta_i\,(x', t')$ selber, wobei die relativen Fehler nie $^1/_2$ vH erreichen, wenn man die ϑ_i auf Zehntel genau berechnet hat.

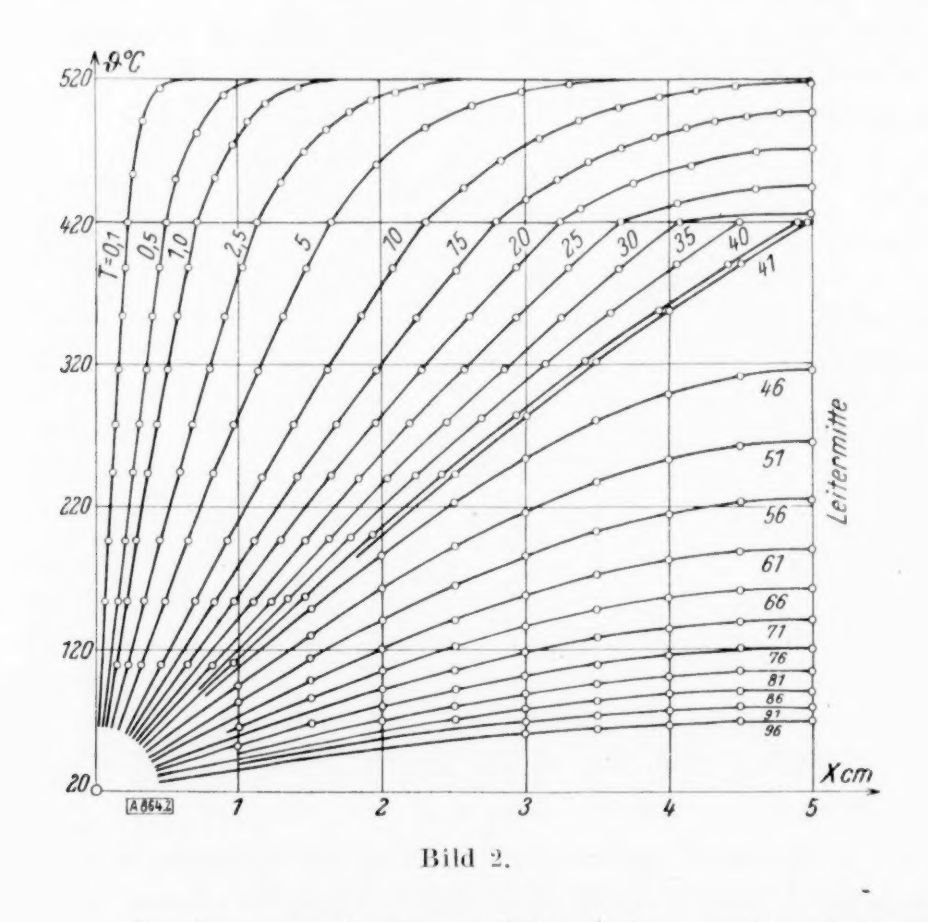


Bild 2.

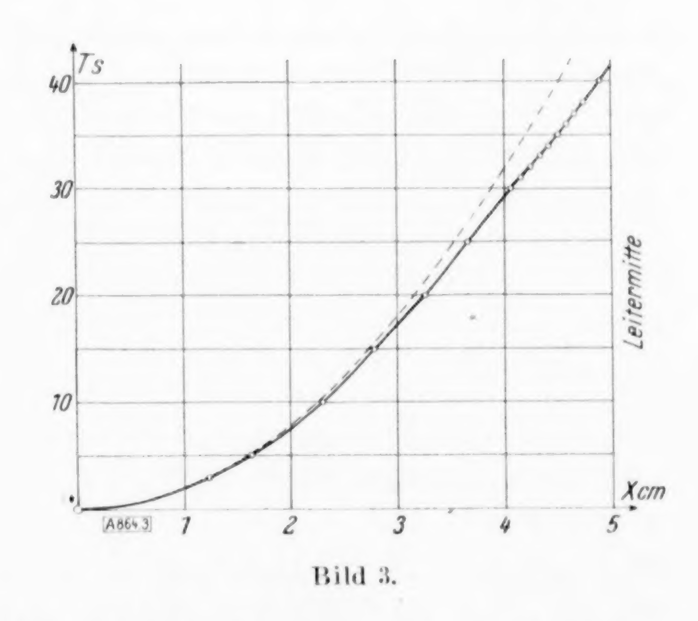


Bild 3.

In der angedeuteten Weise kann ein einigermaßen geübter Rechner einen Schritt an einem Tage ausführen, wenn man es nicht auf eine besonders große Genauigkeit abgesehen hat. In Bild 2 ist ein Teil der von mir berechneten Temperaturverteilungen eingezeichnet. Nach etwa 33 sec ist die Temperatur der Schmelze der Schmelztemperatur schon so nahe, daß ihre örtliche Änderung graphisch nicht mehr dargestellt werden kann. Da sich zeigt, daß $\left.\frac{\partial\,\vartheta_2}{\partial\,x'}\right|_{x'=0}$ von dort an nahezu in geometrischer Progression abnimmt, so braucht man zur Bildung von $\frac{d\,s}{d\,T}$ das $\vartheta_2\,(x')$ überhaupt nicht mehr berechnen, indem man sich bloß mit einer entsprechenden Korrektur begnügt, die unter einem $^1/_2$ vH des von $\frac{\partial\,\vartheta_1}{\partial\,x'}$ gelieferten Beitrages liegt.

Die nach dem geschilderten Verfahren punktweise berechnete „angenäherte" Schmelzkurve ist in Bild 3 (ausgezogen) dargestellt. Sie weicht erst gegen Ende des Erstarrungsvorganges von der strichliert eingetragenen Parabel $X = 0{,}7144\cdot\sqrt{T}$ merklich ab, und es ist sogar zu erkennen, daß sie die zwei Wendepunkte aufweist, die ihr nach der genaueren

Berechnung des Herrn Lachmann zukommen sollten, da ja unser Beispiel einem der von ihm behandelten ziemlich nahe kommt[24]). Man kann aus ihr entnehmen, daß nach 41,4 sec der ganze Leiter erstarrt ist, und dieser Wert dürfte um höchstens eine Sekunde zu klein sein, wie eine grobe Aufsummierung der bei den einzelnen Schritten zu erwartenden Fehler ergibt, wenn man annimmt, daß die „wahre" Schmelzkurve etwas links von der eingezeichneten verläuft. Hätte man die Parabel $X=\delta\cdot\sqrt{T}$ als „Schmelzkurve" genommen, so ergäbe sich für die Erstarrungsdauer die Zeit $T=\frac{25}{\delta^2}=49$ sec, also um rund 20 vH zu groß, so daß man also, wenn man etwa für technische Zwecke nur eine obere Schranke für die Dauer des Erstarrungsvorganges zu kennen wünscht, bloß die Gl. (22′) aufzulösen hat.

Wir wollen noch feststellen, wie sich in unserem Beispiel das δ ändert, wenn man $\varkappa_1=\varkappa_2=0{,}245$ und ebenso $a_1^2=a_2^2=0{,}36$ annehmen würde. Die Gl. (22′) bekommt dann eine etwas einfachere Gestalt und ihre Wurzel wird $\delta=0{,}7169$, womit sich für die Erstarrungsdauer $T=48{,}6$ sec ergibt. Daß sich hier δ nur um 0,3 vH ändert, kommt davon, daß wir $C_1=-4\,C_2$ haben. Es ergibt sich auch tatsächlich eine bedeutend größere Änderung von δ, wenn $C_2>-C_1$, wie man sieht, wenn man $C_1=-100$ und $C_2=400$ in unserem Beispiel setzen würde. Man erhält dann für $\varkappa_1\neq\varkappa_2$ bzw. $\varkappa_1=\varkappa_2$ die folgenden Wurzeln von (22′): $\delta=0{,}204$ bzw. $\delta=0{,}190$, also eine Änderung von 7 vH, so daß man also besonders dann die thermischen Konstanten der Schmelze nicht durch die für den festen Zustand ersetzen darf, wenn C_2 ein großes Vielfaches von $(-C_1)$ ist, wie ja auch aus (22′) sofort ersichtlich ist. In diesem Falle sind also die in der Einleitung diesbezüglich geäußerten Bedenken wohl begründet.

8. Schlußbemerkungen. Es ist einleuchtend, daß sich unsere Methode mit geringfügigen Abänderungen der Formeln auch auf die homogene Kugel übertragen läßt, wie ich hoffentlich bald an der Berechnung der Dicke der festen Erdkruste zeigen werde. Auf dieses Problem, das schon die Aufmerksamkeit von Clapeyron und Lamé[25]) erregt hatte, weist auch Herr M. Brillouin im zweiten seiner im Jahre 1929 im Institut Henri Poincaré gehaltenen Vorträge hin[26]). Nach Erörterung der bisherigen Lösungsversuche in speziellen Fällen, wobei insbesonders der fehlende Existenz- und Unitätsbeweis für die Wurzel der unserer Gl. (22) entsprechenden transzendenten Gleichung beanstandet und ein graphisches Verfahren zur Auffindung eines Näherungswertes derselben angegeben wird, führt Herr Brillouin unser Problem auf die Auflösung eines Systemes von Integralgleichungen zurück, aber „la complication des noyeaux... nous laissent complètement désarmés". Die von ihm dazu benützte Grundlösung der Wärmeleitungsgleichung ist allerdings eine andere, als wir sie im Abschnitt 1 benutzt haben, aber die dabei sich ergebenden Integralgleichungen sind einer numerischen Behandlung genau so unzugänglich, wie die von uns angegebenen für den Fall des unbegrenzten Leiters. Bei der Ausdehnung seiner zunächst für die ebene Platte erhaltenen Ergebnisse auf die Kugel ist aber Herrn Brillouin ein Fehler unterlaufen, auf den ich hier hinweisen möchte. Die von ihm mit M_I in seiner Gl. (XXIII) bezeichnete Funktion genügt nämlich gar nicht der Wärmeleitungsgleichung für den linearen Leiter, und daher sind die in XXIV und XXV dargestellten Ausdrücke keine Integrale der mit XIX bezeichneten Differentialgleichung.

Schließlich möchte ich noch einige Ergebnisse der noch unveröffentlichten Wiener Dissertation des Herrn Robert Rieck aus dem Jahre 1924 erwähnen, auf die mich Herr Hofrat Wirtinger aufmerksam gemacht hat[27]). Es werden dort zunächst solche Integrale der Gleichung

$$a^2\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{m}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{\partial u}{\partial t},$$

die für $m=0,1,2$ die Ausbreitung der Wärme in einem Stab, einem Zylinder und in einer Kugel beherrscht, gesucht, die bloß von $z=\frac{r}{\varphi(t)}$ abhängen, wobei $r=\varphi(t)$ die Gleichung der „Schmelzkurve" sein soll. Aus der an der veränderlichen Schmelzgrenze vorgeschriebenen

[24]) Kurve $\vartheta_S=0{,}8$; $\varkappa=0{,}1$ der Abb. 7 auf S. 352 des in Fußnote [3]) a. O.

[25]) Mémoire sur la solidification par refroidissement d'un globe liquide. Ann. d. Ch. et de Phys. 47 (1831), S. 250 bis 256.

[26]) Sur quelques problèmes non résolues de la Physique Mathématique classique. Propagation de la fusion. Ann. de l'Institut H. Poincaré 1 (1931), S. 285 bis 308.

[27]) „Die Wärmeleitungsgleichung bei Änderung des Aggregatzustandes. (Schmelzen u. Erstarren.) Lösungen für Kugel und Zylinder." Ein Teil dieser Arbeit soll demnächst in den Monatsh. f. Math. u. Phys. erscheinen.

Bedingung folgt dann zunächst, daß $\varphi = \sqrt{C_0 \cdot t + C_1}$ sein muß, wobei C_0 und C_1 willkürliche Konstanten bedeuten. Dann muß aber $u(z)$ der folgenden gewöhnlichen Differentialgleichung genügen:

$$\frac{d^2 u}{d z^2} + \left(\frac{m}{z} + \frac{C_0}{2 a^2} \cdot z\right) \cdot \frac{d u}{d z} = 0,$$

woraus sich für $C_0 = 1$ und $C_1 = \alpha$ ergibt

$$u(r, t) = B_0 + B_1 \cdot \int^{\frac{r}{2a\sqrt{t+\alpha}}} e^{-x^2} \cdot \frac{dx}{x^m}.$$

Von den noch verfügbaren Konstanten B_0, B_1 und α ist B_1 durch die Temperatur an der Schmelzgrenze bestimmt, während B_0 und α willkürlich bleiben. Die auf diese Weise gewonnenen neuen partikulären Integrale lassen sich für $m = 1,2$ durch den Integrallogarithmus bzw. das Gaußsche Fehlerintegral darstellen. Natürlich sind sowohl bei diesen sowie auch bei einigen anderen noch aufgestellten neuen partikulären Integralen die Rand- und Anfangsbedingungen beinahe schon vollständig von vornherein festgelegt. 864

A Non-linear Wing Theory and its Application to Rectangular Wings of Small Aspect Ratio

by *William Bollay*[1]), Cambridge, Mass. U. S. A.

Zusammenfassung. Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Berechnung der Kräfte, die auf einen rechteckigen Tragflügel mit kleinem Seitenverhältnis wirken. Erforderlich dafür ist eine nichtlineare Tragflügeltheorie, die nicht die übliche Annahme macht, daß z. B. der Anstellwinkel klein ist und daß die abgehende Wirbelbahn in der Tragflügelebene liegt. Der wesentliche Unterschied der folgenden Entwicklung gegenüber den von Prandtl und Blenk gegebenen Theorien der tragenden Linie, bzw. der tragenden Fläche, besteht in der Annahme, daß die abgehenden Wirbel die Tragfläche unter einem gewissen Winkel zu ihr dort verlassen, wo sie gebildet werden. Deshalb erzeugen die abgehenden Wirbel eine Geschwindigkeit tangentiell zur Tragfläche und dies ändert die resultierende Kraft an der Tragfläche. Da eine gleichförmige Auftriebsverteilung angenommen ist, liegen die Wirbel in den Endflächen des Flügels. Die Resultate zeigen gute Übereinstimmung mit den Versuchen von Winter. Im Grenzfalle des verschwindenden Seitenverhältnisses gibt die Theorie einen Normalkraftbeiwert $C_N = 2 \sin^2 \alpha$, während im Falle eines unendlich großen Seitenteiles sich das bekannte Resultat $C_N = 2\pi \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ ergibt.

Introduction. The theory for flow about a wing of large aspect ratio has been worked out quite completely along the lines suggested by Prandtl. This is the flow which is of principal interest for the main lifting surfaces of present day airplanes. However, for some unconventional airplane wings and especially for the control surfaces of dirigibles, the lifting surfaces have generally a very small aspect ratio and the existing theories have so far been inadequate to give either the magnitude or the distribution of the forces correctly.

The Prandtl theory which replaces the wing by a lifting vortex line holds very closely for large aspect ratios k of the order $k > 4$. For smaller aspect ratios, Birnbaum [1] and Blenk [2] carried out an extension of the Prandtl theory by replacing the wing by a distribution of vortex lines, thus giving the so-called lifting surface theory. This theory holds approximately down to aspect ratios of the order 1. However, here the experimental lift curves indicate a curvature concavely upward, and Blenk stated already in 1925 that some additional effect causing this curvature becomes important at small aspect ratios. He realized that this effect could not be obtained by means of the existing wing theory, because this latter is essentially a linear theory. Since this time no theoretical work has been done on the wing of small aspect ratio[2]). In 1935, however, Winter [3] reported on a very extensive

[1]) This paper is essentially an abstract from the author's thesis-work carried out at the California Institute of Technology, under the supervision of Prof. Dr. v. Kármán. I acknowledge gratefully on this occasion Dr. v. Kármán's suggestion of the subject of my thesis and the very effective help during the work.

[2]) Since the writing of this paper W. Kinner has treated the case of the circular wing in the Ingenieur-Archiv, 1937 (p. 47), and F. Weinig has discussed the application of the lattice theory to small aspect ratio wings in Luftfahrtforschung, 1936 (p. 405).

experimental investigation carried out at Danzig on wings of small aspect ratio. Also at about the same time, interest arose in America in the forces and pressure distribution on dirigible fins in connection with the investigation of the Macon accident. Dr. von Kármán then suggested to the author that he carry out an investigation for the wing of zero aspect ratio, assuming trailing vortices leaving at some angle to the wing, and to try to extend these results to the wing with finite aspect ratio. The present paper represents a report on the results of this investigation. It represents a first step in the establishment of a non-linear wing theory. Since such a theory is principally useful for very small aspect ratios (smaller than about one), the approximations which were made to simplify the calculations were made so as to fit especially for this region of aspect ratios. As a result, the theory which gives the correct result for both the limiting cases of zero and infinite aspect ratios holds best for aspect ratios below about one.

In the present paper, we shall restrict ourselves to finding the normal force on a rectangular flat plate wing. In addition, in the appendix we shall further investigate the limiting case of the wing with zero aspect ratio, that is finite span but infinite chord. Work is also under way to apply the same theory to the dynamic lift of dirigibles, which exhibit a behavior very similar to wings of extremely small aspect ratio; however, these calculations are not yet completed.

A. Theory for Rectangular Wings of Small Aspect Ratio.

1. Assumptions. Let us assume that a flat plate wing is inclined at the angle of attack α with respect to the free stream velocity U. We can resolve this velocity U into a component along the wing, $U \cdot \cos \alpha$, and a component normal to the wing, $U \cdot \sin \alpha$. Now it can be shown that for purposes of a mathematical analysis, the solid boundary of the wing can be replaced by an equivalent system of bound vortices. The strength of these vortices is determined by the boundary condition that there be no flow through the plate. This means that the normal component of the free stream velocity is cancelled by the normal component of the induced velocities at every point on the plate. A theoretical analysis of the wing of zero aspect ratio shows that the vortex strength and the induced velocity are constant along the span. Experiments show that this is still a fairly good approximation at an aspect ratio of about 1 (see Fig. 14). Thus for the analysis of wings of small aspect ratio, we shall simplify our analysis by the assumptions that

a) the vortex strength is constant across the span,

b) the downwash along the span is constant and equal to the value at the center of the span.

Let us now consider the vortex distribution corresponding to a rectangular wing of small aspect ratio. We shall denote the variables along the chord and span by x and y

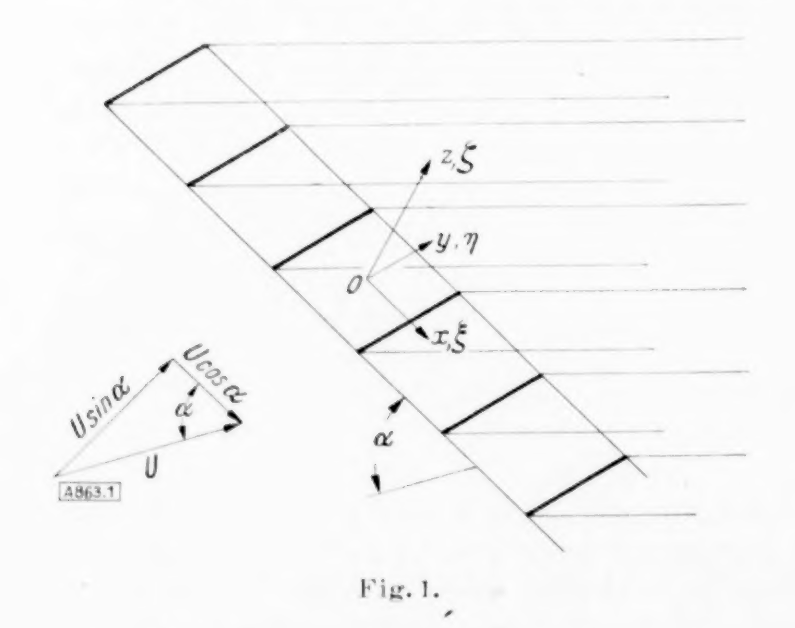


Fig. 1.

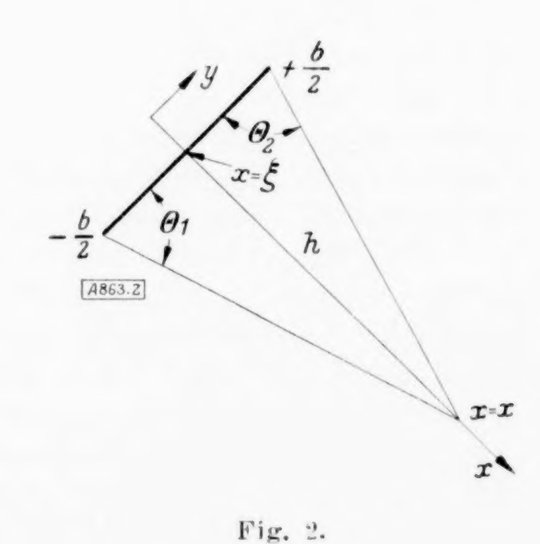


Fig. 2.

respectively, and current variables in the same directions by ξ and η. The coordinate normal to the plate is denoted by z, the positive direction being chosen upward. The origin 0 is chosen in the center of the wing. Then an equivalent vortex system replacing the wing consists of a distribution of bound vortices which is assumed constant along the span and of variable intensity $\gamma(\xi)$ along the chord. At the ends of the span each bound vortex is assumed to leave as a straight trailing vortex at some angle Θ to the wing. These trailing

vortices are assumed to lie in the two vertical planes passed through the sides of the wing. Thus we get the system of horse-shoe vortices shown in Figure 1.

Our first problem is to calculate the induced velocities along the center line of the plate for any point x along the chord due to the bound and trailing vortices respectively. These are obtained by the Biot-Savart Law.

2. Induced Velocity Due to Bound Vortices. A single bound vortex of strength γ gives an induced velocity which is normal at every point to the plane of the wing and which has a magnitude

$$w_z = \frac{\gamma}{4\pi} \cdot \frac{1}{h} \cdot (\cos\Theta_1 + \cos\Theta_2) \qquad \text{or} \qquad w_z = \frac{\gamma}{4\pi} \cdot \frac{1}{x-\xi} \cdot \frac{2 \cdot \frac{b}{2}}{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + (x-\xi)^2}}.$$

We have to integrate the effect of such vortices of variable strength $\gamma(\xi)$ from $\xi = -\frac{t}{2}$ to $\xi = +\frac{t}{2}$ and obtain as the induced velocity normal to the wing due to the bound vortices

$$w_{z_1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-t/2}^{+t/2} \frac{\gamma(\xi)}{x-\xi} \cdot \frac{\frac{b}{2} \cdot d\xi}{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + (x-\xi)^2}}.$$

In the plane of the vortices the tangential induced velocity w_x is zero. However, an infinitesimal distance above the plate $w_{x_1} = +\frac{\gamma(x)}{2}$, and an infinitesimal distance below $w_{x_2} = -\frac{\gamma(x)}{2}$. Introducing dimensionless coordinates $\frac{x}{t/2} \to x$, $\frac{\xi}{t/2} \to \xi$, $\frac{b/2}{t/2} \to k =$ aspect ratio, we thus get for the induced velocities at the plate

$$\boxed{\begin{aligned} w_{z_1} &= \frac{k}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\gamma(\xi)}{x-\xi} \cdot \frac{d\xi}{\sqrt{k^2 + (x-\xi)^2}} \\ w_{x_1} &= +\frac{\gamma(x)}{2} \quad \text{at} \quad z = +\varepsilon \\ w_{x_2} &= -\frac{\gamma(x)}{2} \qquad\quad\;\; z = -\varepsilon \end{aligned}}$$

3. Induced Velocity Due to Trailing Vortiees. A pair of trailing vortices of strength γ give an induced velocity w_n normal to their plane of magnitude

$$w_n = 2\, w_i \cdot \sin\delta = 2 \cdot \frac{\gamma}{4\pi} \cdot \frac{1}{h} \cdot (\cos\lambda + 1) \cdot \sin\delta$$

where

$$h^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + (x-\xi)^2 \cdot \sin^2\Theta$$

$$\sin\delta = \frac{b/2}{h}$$

$$\cos\lambda = \frac{(x-\xi)\cdot\cos\Theta}{\sqrt{(x-\xi)^2\cdot\cos^2\Theta + h^2}} = \frac{(x-\xi)\cdot\cos\Theta}{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot + (x-\xi)^2}}.$$

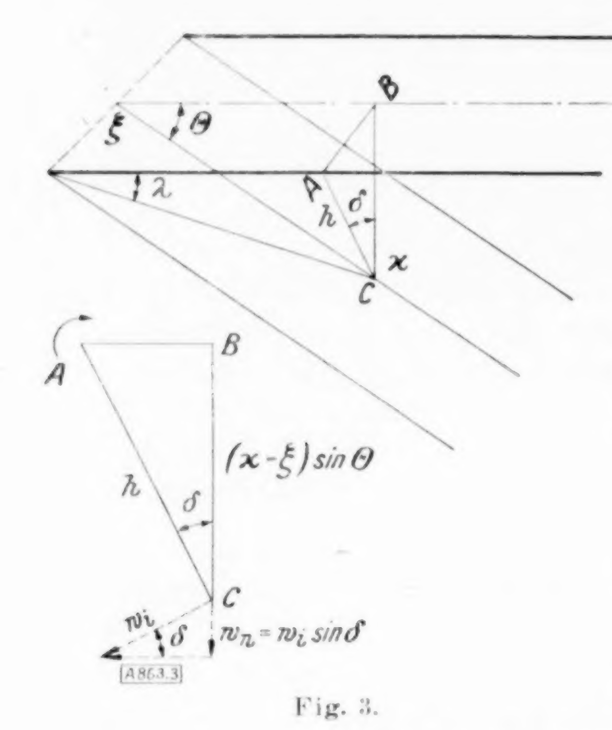


Fig. 3.

As the integral of the downwash due to the trailing vortices coming from both ends of the span, we get

$$w_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{b}{2} \cdot \int_{-t/2}^{+t/2} \frac{\gamma(\xi) \cdot d\xi}{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + (x-\xi)^2 \cdot \sin^2\Theta} \cdot \left[\frac{(x-\xi)\cdot\cos\Theta}{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + (x-\xi)^2}} + 1\right].$$

The normal component w_{z_2}, and the tangential component w_{x_2} of the induced velocity are respectively

$$w_{z_2} = w_n \cdot \cos\Theta$$

and

$$w_{x_2} = w_n \cdot \sin\Theta = w_{z_2} \cdot \tan\Theta.$$

Introducing dimensionless coordinates we can therefore write

$$\boxed{\begin{aligned} w_{z_2} &= \frac{k\cdot\cos\Theta}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\gamma(\xi)\cdot d\xi}{k^2 + (x-\xi)^2\cdot\sin^2\Theta} \cdot \left[\frac{(x-\xi)\cdot\cos\Theta}{\sqrt{k^2+(x-\xi)^2}} + 1\right] \\ w_{x_2} &= w_{z_2}\cdot\tan\Theta \end{aligned}}.$$

4. Derivation and Solution of Integral Equation. Expressing our boundary condition now that the normal component of the induced velocity at the plate is equal and opposite to the normal component of the free stream velocity, we get an integral equation for the determination of $\gamma(\xi)$:

$$w_{z_1}(x) + w_{z_2}(x) = U\cdot\sin\alpha$$

or

$$\frac{k}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\gamma(\xi)}{x-\xi} \cdot \frac{d\xi}{\sqrt{k^2+(x-\xi)^2}} + \frac{k}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\gamma(\xi)\cdot\cos\Theta\cdot d\xi}{k^2+(x-\xi)^2\cdot\sin^2\Theta}$$

$$+ \frac{k}{2\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\gamma(\xi)\cdot\cos^2\Theta\cdot(x-\xi)\cdot d\xi}{[k^2+(x-\xi)^2\cdot\sin^2\Theta]\cdot\sqrt{k^2+(x-\xi)^2}} = U\cdot\sin\alpha.$$

In order to get the pressure distribution over the wing, it is necessary to solve this integral equation for $\gamma(\xi)$. In the present investigation, we shall restrict ourselves to finding the total force alone. This makes it necessary to satisfy the integral equation only in the mean. We assume some reasonable distribution for the vorticity over the chord such as $\gamma(\xi) = \gamma_0 \sqrt{\frac{t/2-\xi}{t/2+\xi}}$ (which holds for large aspect ratios), and then use the integral equation to determine the constant γ_0.

Expressing the fact that the mean value of the induced velocity over the chord is equal to the normal component of the free-stream velocity, we get

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} [w_{z_1}(x) + w_{z_2}(x)]\cdot dx = U\cdot\sin\alpha$$

or interchanging the order of integration of x and ξ

$$\frac{k}{4\pi}\int_{-1}^{+1}\gamma(\xi)\cdot d\xi \underbrace{\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{(x-\xi)\cdot\sqrt{k^2+(x-\xi)^2}}}_{I_1(\xi)} + \frac{k}{4\pi}\int_{-1}^{+1}\gamma(\xi)\cdot\cos\Theta\cdot d\xi\cdot\underbrace{\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{k^2+(x-\xi)^2\cdot\sin^2\Theta}}_{I_2(\xi)}$$

$$+ \frac{k}{4\pi}\int_{-1}^{+1}\gamma(\xi)\cdot\cos^2\Theta\cdot d\xi\underbrace{\int_{-1}^{+1}\frac{(x-\xi)\cdot dx}{[k^2+(x-\xi)^2\cdot\sin^2\Theta]\sqrt{k^2+(x-\xi)^2}}}_{I_3(\xi)} = U\cdot\sin\alpha$$

where

$$I_1(\xi)=\int_{-1}^{+1}\frac{d\,x}{(x-\xi)\sqrt{k^2+(x-\xi)^2}}=\frac{1}{k}\cdot\log\left[\frac{k+\sqrt{k^2+(1+\xi)^2}}{k+\sqrt{k^2+(1-\xi)^2}}\cdot\frac{1-\xi}{1+\xi}\right]$$

$$I_2(\xi)=\int_{-1}^{+1}\frac{d\,x}{k^2+(x-\xi)^2\cdot\sin^2\Theta}=\frac{1}{k\cdot\sin\Theta}\cdot\left[\tan^{-1}\left\{\frac{(1+\xi)\cdot\sin\Theta}{k}\right\}+\tan^{-1}\left\{\frac{(1-\xi)\cdot\sin\Theta}{k}\right\}\right]$$

$$I_3(\xi)=\int_{-1}^{+1}\frac{(x-\xi)\cdot d\,x}{[k^2+(x-\xi)^2\cdot\sin^2\Theta]\sqrt{k^2+(x-\xi)^2}}$$

$$=\frac{-1}{k\cdot\sin\Theta\cdot\cos\Theta}\left[\tan^{-1}\left\{\frac{\tan\Theta}{k}\sqrt{k^2+(1+\xi)^2}\right\}-\tan^{-1}\left\{\frac{\tan\Theta}{k}\sqrt{k^2+(1-\xi)^2}\right\}\right].$$

Now substituting these values in the above equation and letting

$$\gamma=\gamma_0\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}$$

we get

$$\underbrace{\frac{\gamma_0}{4\pi}\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}\left\{\log\frac{k+\sqrt{k^2+(1+\xi)^2}}{k+\sqrt{k^2+(1-\xi)^2}}-\log\frac{1+\xi}{1-\xi}\right\}\cdot d\,\xi}_{F_1(k)}$$

$$+\underbrace{\frac{\gamma_0\cdot\cos\Theta}{4\pi\cdot\sin\Theta}\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}\left\{\tan^{-1}\left[\frac{(1+\xi)\cdot\sin\Theta}{k}\right]+\tan^{-1}\left[\frac{(1-\xi)\cdot\sin\Theta}{k}\right]\right\}\cdot d\,\xi}_{F_2(k,\Theta)}$$

$$-\underbrace{\frac{\gamma_0\cdot\cos\Theta}{4\pi\cdot\sin\Theta}\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}\left\{\tan^{-1}\left[\frac{\tan\Theta}{k}\sqrt{k^2+(1+\xi)^2}\right]-\tan^{-1}\left[\frac{\tan\Theta}{k}\cdot\sqrt{k^2+(1-\xi)^2}\right]\right\}\cdot d\,\xi}_{F_3(k,\Theta)}$$

$$=U\cdot\sin\alpha$$

and solving for γ_0:

$$\gamma_0=\frac{4\pi\cdot U\cdot\sin\alpha}{F_1(k)+\cot\Theta\cdot F_2(k,\Theta)-\cot\Theta\cdot F_3(k,\Theta)}.$$

The problem is thus reduced to solving the three integrals $F_1(k)$, $F_2(k,\Theta)$, and $F_3(k,\Theta)$.

5. Discussion of $F_1(k)$.

$$F_1(k)=\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}\left\{\log\frac{k+\sqrt{k^2+(1+\xi)^2}}{k+\sqrt{k^2+(1-\xi)^2}}-\log\frac{1+\xi}{1-\xi}\right\}\cdot d\,\xi.$$

The second part of the above integral is integrable by elementary methods. However, the first cannot be integrated by any of the elementary methods nor does it adapt itself to solution by contour integration or by a differential equation. Some method of expansion was thus the only alternative. The first attempt was to expand the radical in the domains $(1\pm\xi)<k$ and $(1\pm\xi)>k$ and then expand the logarithm and integrate. This was carried out. However, the result was very long and the convergence of the series rather doubtful. A better method of expansion was found to be the following: As a first approximation, since $k\ll 1$, we can write (letting $u=1\pm\xi$)

$$\log(k+\sqrt{k^2+u^2})\doteq\log(k+u).$$

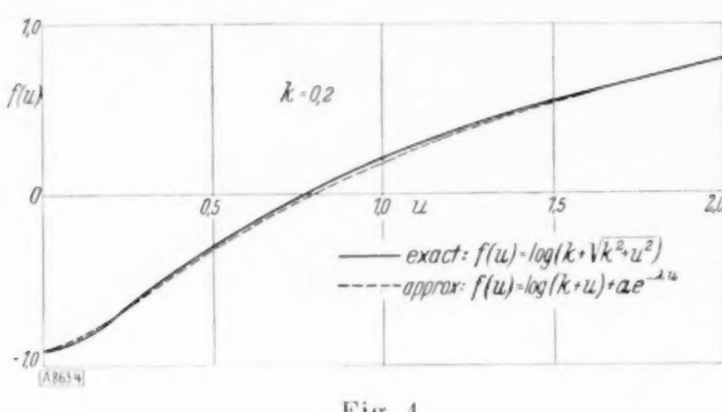


Fig. 4.

This approximation is good if $k \ll u$ over most of the domain, but it does not hold near $u = 0$, i. e. $\xi = -1$ (the leading edge). Since the weight function becomes infinite in that vicinity, it is necessary to have a good approximation there. A better approximation can be obtained by letting

$$\log(k + \sqrt{k^2 + u^2}) = \log(k + u) + a \cdot e^{-\lambda u},$$

where constants a and λ are determined to fit the difference curve of

$$[\log(k + \sqrt{k^2 + u^2}) - \log(k + u)] \text{ at } u = 0 \text{ and } u = k.$$

The exact and approximate formulae are plotted up below for the case $k = .2$ and show a very close fit indeed (Fig. 4). It was found possible to integrate the new functions. The first came out in terms of elementary functions, the second in terms of the Bessel function with imaginary argument of the order of 1, $I_1(\lambda)$. The result of this rather long analysis is:

$$F_1(k) = \frac{2\pi k}{k+2} + \frac{4\pi}{k+2}\sqrt{\frac{k}{k+2}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{k}{k+2}} + 2}{\left(\sqrt{\frac{k}{k+2}} + 1\right)^2} + 4.35\, e^{-\frac{1.302}{k}} I_1\left(\frac{1.302}{k}\right).$$

6. Discussion of $F_2(k, \Theta)$:

$$F_2(k, \Theta) = \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \left\{\tan^{-1}\left[\frac{(1+\xi)\cdot\sin\Theta}{k}\right] + \tan^{-1}\left[\frac{(1-\xi)\cdot\sin\Theta}{k}\right]\right\} \cdot d\xi.$$

This integral can be evaluated exactly using the method of contour integration. The result, not derived here is

$$F_2(k, \Theta) = 2\pi \cdot \tan^{-1}\left\{\frac{2\cdot\sin\Theta}{k}\right\} - 4\pi \cdot \tan^{-1}\left\{\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\left[\frac{2\sin\Theta}{k}\right]\right)}{\sqrt[4]{1 + \left(\frac{2\sin\Theta}{k}\right)^2} + \cos\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\left[\frac{2\sin\Theta}{k}\right]\right)}\right\}.$$

This expression can be reduced so as to involve only one parameter, namely $\mu = \frac{2\cdot\sin\Theta}{k}$. Then

$$F_2(k, \Theta) = 2\pi \cdot \tan^{-1}\mu - 4\pi \cdot \tan^{-1}\left\{\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\mu\right)}{\sqrt[4]{1+\mu^2} + \cos\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\mu\right)}\right\}.$$

7. Discussion of $F_3(k, \Theta)$:

$$F_3(k, \Theta) = \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \left\{\tan^{-1}\left[\frac{\tan\Theta}{k}\sqrt{k^2 + (1+\xi)^2}\right] - \tan^{-1}\left[\frac{\tan\Theta}{k}\sqrt{k^2 + (1-\xi)^2}\right]\right\} \cdot d\xi.$$

This integral, like the first one, cannot be exactly calculated by any of the conventional methods. However, it is again adaptable to the same method of expansion as $F_1(k)$, by writing

$$\tan^{-1}\left[\frac{\tan\Theta}{k}\sqrt{k^2 + u^2}\right] = \tan^{-1}\left\{\frac{\tan\Theta}{k}u\right\} + a \cdot e^{-\lambda u}$$

in which $(1 \pm \xi) = u$, the constants a and λ being again adjusted to fit the curves at $u = 0$ and $u = k$. The exact and approximate formulae again showed very close agreement when plotted for the case $k = .2$. The term involving $\tan^{-1}\left\{\frac{\tan\Theta \cdot u}{k}\right\}$ could again be evaluated by the method of contour integration similarly to $F_2(k, \Theta)$. The term involving $a \cdot e^{-\lambda u}$ again came out in terms of the Bessel function $I_1(\lambda)$. The result of the analysis, again not derived here, is

$$F_3(k,\Theta) = 4\pi \cdot \frac{k}{2\cdot\tan\Theta}\left[1 - \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2\tan\Theta}{k}\right) + \frac{2\tan\Theta}{k}\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2\tan\Theta}{k}\right)}{\sqrt[4]{1+\left(\frac{2\tan\Theta}{k}\right)^2}}\right]$$

$$+2\pi\cdot\Theta\cdot e^{-\lambda}\cdot I_1(\lambda),$$

where

$$\lambda = -\frac{1}{k}\log\left\{\frac{\tan^{-1}(\sqrt{2}\,\tan\Theta)}{\Theta} - 1\right\}.$$

The first half of this can be reduced in terms of the parameter $\nu = \dfrac{2\tan\Theta}{k}$. Then

$$\boxed{F_3(k,\Theta) = 4\pi\left[\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu}\cdot\frac{\cos\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\nu\right)}{\sqrt[4]{1+\nu^2}} - \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\nu\right)}{\sqrt[4]{1+\nu^2}}\right] + 2\pi\Theta\cdot e^{-\lambda}\cdot I_1(\lambda)}\,.$$

Now

$$\gamma_0 = \frac{4\pi U\cdot\sin\alpha}{F_1(k) + \cot\Theta\cdot F_2(k,\Theta) - \cot\Theta\cdot F_3(k,\Theta)}.$$

Since $F_3(k,\Theta)$ can be expressed as the sum of two terms which are functions of the simpler variables ν and λ respectively, it is convenient to define new parameters $B(\nu)$ and $C(\lambda)$, in which we can at the same time absorb the factor 4π. Thus we write

$$F_1'(k) = \frac{F_1(k)}{4\pi} \qquad A(\mu) = \frac{F_2(k,\Theta)}{4\pi} \qquad -B(\nu) + \Theta\cdot C(\lambda) = \frac{F_3(k,\Theta)}{4\pi},$$

where

$$B(\nu) = \left[-\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu}\cdot\frac{\cos\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\nu\right)}{\sqrt[4]{1+\nu^2}} + \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\nu\right)}{\sqrt[4]{1+\nu^2}}\right]$$

$$C(\lambda) = \frac{1}{2}e^{-\lambda}I_1(\lambda)$$

then

$$\gamma_0 = \frac{U\cdot\sin\alpha}{F_1'(k) + \cot\Theta\,[A(\mu) + B(\nu) - \Theta\cdot C(\lambda)]}.$$

8. Calculation of Induced Velocity Tangential to Plate. In the ordinary wing theory which assumes small angles of attack, the effect of the induced velocity tangential to the plate is neglected. Since the angles of attack which wings of small aspect ratio reach before stalling may run up to 45°, it is necessary to consider this velocity in the calculation of the forces acting. The bound vortices induce a velocity tangential to the plate which is $+\dfrac{\gamma(x)}{2}$ at the top of the wing and $-\dfrac{\gamma(x)}{2}$ at the bottom. Their mean value at the wing is therefore zero. The trailing vortices, however, induce a velocity which has a component along the wing equal to $w_x = w_i\cdot\sin\Theta = w_z\cdot\tan\Theta$. The mean value of w_x over the chord is then given as

$$\overline{w}_x = \frac{\gamma_0}{4\pi}[F_2(k,\Theta) - F_3(k,\Theta)] = \gamma_0[A(\mu) + B(\nu) - \Theta\cdot C(\lambda)]$$

and since

$$\gamma_0[A(\mu) + B(\nu) - \Theta\cdot C(\lambda)] = U\cdot\sin\alpha\cdot\tan\Theta - F_1'(k)\cdot\tan\Theta\cdot\gamma_0$$

$$\boxed{\overline{w}_x = U\cdot\sin\alpha\cdot\tan\Theta - F_1'(k)\cdot\tan\Theta\cdot\gamma_0}\,.$$

9. Determination of Inclination of Trailing Vortices. The inclination of the trailing vortices with respect to the plate which we have denoted by Θ is determined by the Helmholtz vortex law at every point in space. This law states that a free vortex follows the fluid particles. Thus the vortex will lie along the resultant velocity vector. The inclination of this resultant velocity vector has been assumed constant all during this development. If it should be variable, we should therefore desire an effective mean value for the inclination. However, this is quite difficult to obtain exactly, and as an approximation we shall therefore choose, for the effective inclination Θ, the angle at which the vortices leave the plate. The justification for doing this is that the vortices right near the plate are the most effective in determining the downwash there[3]).

With these approximations, the determination of the angle of the resultant velocity vector at the side of the plate is a simple matter in terms of our previous results. For it is clear that the induced velocities at the sides of the plate are exactly half as much as the induced velocities would be at the center of a wing of twice the span and thus twice the aspect ratio. This is due to the fact that in the plane of the side of the plate only the opposite vortex sheet can induce any velocities in the x and z directions. We obtain for the mean values of the induced velocities:

$$\overline{w}_{z_1}=\frac{\gamma_0}{4\pi}\cdot\frac{F_1(2k)}{2}=\gamma_0\cdot\frac{F_1'(2k)}{2}$$

$$\overline{w}_{z_2}=\frac{\gamma_0\cdot\cos\Theta}{4\pi\cdot\sin\Theta}\left[\frac{F_2(2k,\Theta)-F_3(2k,\Theta)}{2}\right]=\frac{\gamma_0\cdot\cot\Theta}{2}\cdot\left[A\left(\frac{\mu}{2}\right)+B\left(\frac{\nu}{2}\right)-\Theta\cdot C\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right]$$

$$\overline{w}_{x_1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t}\int_{-t/2}^{+t/2}\frac{\gamma(\xi)}{2}\cdot d\xi=\frac{\pi}{8}\gamma_0$$

$$\overline{w}_{x_2}=\overline{w}_{z_2}\cdot\tan\Theta$$

and the components of the free-stream velocity are $U\cdot\sin\alpha$ and $U\cdot\cos\alpha$ respectively. The inclination of the resultant velocity is thus

$$\tan\Theta=\frac{U\cdot\sin\alpha-\overline{w}_{z_1}-\overline{w}_{z_2}}{U\cdot\cos\alpha+\overline{w}_{x_1}+\overline{w}_{x_2}}$$

$$\boxed{\tan\Theta=\frac{\sin\alpha-\frac{\gamma_0}{U}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[F_1'(2k)+\cot\Theta\cdot\left\{A\left(\frac{\mu}{2}\right)+B\left(\frac{\nu}{2}\right)-\Theta\cdot C\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right\}\right]}{\cos\alpha+\frac{\gamma_0}{U}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4}\qquad+\qquad\left\{A\left(\frac{\mu}{2}\right)+B\left(\frac{\nu}{2}\right)-\Theta\cdot C\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right\}\right]}}.$$

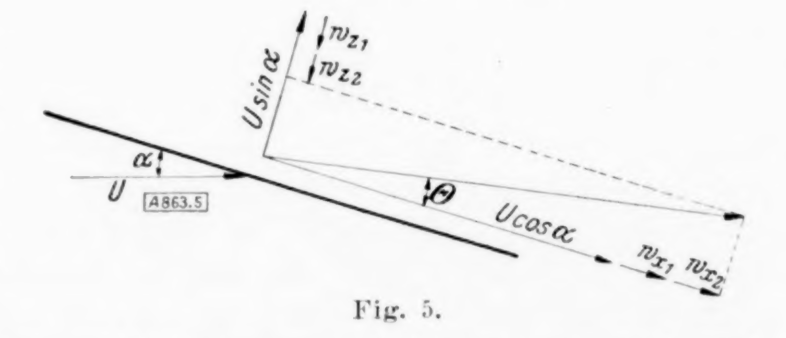


Fig. 5.

Since $\frac{\gamma_0}{U}$ is a function of Θ this equation for Θ can only be solved by iteration. As a first approximation, we can assume $\Theta=\frac{\alpha}{2}$, calculate $\frac{\gamma_0}{U}$ and the functions A, B and C and then find a new expression for $\tan\Theta$. A second approximation will, with a little experience, give very good agreement between assumed and resultant value for Θ.

10. Calculation of Normal Force. By applying the formula for the force on a vortex, we can now calculate the normal force N acting on the wing as

$$N=\varrho(U\cdot\cos\alpha+\overline{w}_x)\cdot\Gamma\cdot b,$$

where

$$\Gamma=\int_{-t/2}^{+t/2}\gamma(\xi)\cdot d\xi=\gamma_0\int_{-t/2}^{+t/2}\sqrt{\frac{t/2-\xi}{t/2+\xi}}\,d\xi=\frac{\pi}{2}\gamma_0\cdot t$$

[3]) Another approximation which we shall use is that we assume the trailing vortices to lie in the two vertical planes passed through the sides of the wing. This amounts to neglecting the y-component of the induced velocity when applying the Helmholtz condition.

$$\overline{w}_x = U \cdot \sin\alpha \cdot \tan\Theta - F_1'(k) \cdot \tan\alpha \cdot \gamma_0$$

$$\gamma_0 = \frac{U \cdot \sin\alpha}{F_1'(k) + \cot\Theta \cdot [A(\mu) + B(\nu) - \Theta \cdot C(\lambda)]}$$

$$N = \varrho \left(U \cdot \cos\alpha + U \cdot \sin\alpha \cdot \tan\Theta - U \cdot F_1'(k) \cdot \tan\Theta \cdot \frac{\gamma_0}{U} \right) \cdot U \cdot \frac{\gamma_0}{U} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot b\,t$$

$$C_N = \frac{N}{\frac{1}{2} \varrho U^2 \cdot b\,t}$$

$$\boxed{C_N = \pi \frac{\gamma_0}{U} \cdot \left[\cos\alpha + \sin\alpha \cdot \tan\Theta - F_1'(k) \cdot \tan\Theta \cdot \frac{\gamma_0}{U} \right]}\,.$$

This formula for C_N represents the final result of our analysis. We shall determine its asymptotic behavior at aspect ratio $k = 0$ and $k = \infty$. Then we shall compare the theoretical curves of C_N vs. α with some experiments made by Winter on wings of small aspect ratio.

For convenience, let us summarize the important formulas which are required for the calculation of the normal force coefficients. We have

$$C_N = \pi \frac{\gamma_0}{U} \cdot \left[\cos\alpha + \sin\alpha \cdot \tan\Theta - F_1'(k) \cdot \tan\Theta \cdot \frac{\gamma_0}{U} \right]$$

$$\frac{\gamma_0}{U} = \frac{\sin\alpha}{F_1'(k) + \cot\Theta \cdot [A(\mu) + B(\nu) - \Theta \cdot C(\lambda)]}$$

$$\tan\Theta = \frac{\sin\alpha - \frac{\gamma_0}{U} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[F_1'(2k) + \cot\Theta \cdot \left\{ A\left(\frac{\mu}{2}\right) + B\left(\frac{\nu}{2}\right) - \Theta \cdot C\left(\frac{\lambda}{2}\right) \right\} \right]}{\cos\alpha + \frac{\gamma_0}{U} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\pi}{4} + \left\{ A\left(\frac{\mu}{2}\right) + B\left(\frac{\nu}{2}\right) - \Theta \cdot C\left(\frac{\lambda}{2}\right) \right\} \right]}$$

$$F_1'(k) = \frac{\frac{1}{2}k}{k+2} + \frac{1}{k+2} \cdot \sqrt{\frac{k}{k+2}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{k}{k+2}} + 2}{\left(\sqrt{\frac{k}{k+2}} + 1\right)^2} + \frac{\log_e 2}{2} \cdot e^{-\frac{1.302}{k}} \cdot I_1\left(\frac{1.302}{k}\right) \qquad \text{(Fig. 6)}$$

$$A(\mu) = \frac{1}{2} \tan^{-1}\mu - \tan^{-1} \left\{ \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\mu\right)}{\sqrt[4]{1+\mu^2} + \cos\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\mu\right)} \right\} \qquad \text{(Fig. 7a, b)}$$

$$B(\nu) = -\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu} \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\nu\right)}{\sqrt[4]{1+\nu^2}} + \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\nu\right)}{\sqrt[4]{1+\nu^2}} \qquad \text{(Fig. 8)}$$

$$C(\lambda) = \frac{1}{2} e^{-\lambda} \cdot I_1(\lambda) \qquad \text{(Fig. 9)}$$

$$\lambda = -\frac{1}{k} \log \left\{ \frac{\tan^{-1}(\sqrt{2}\tan\Theta)}{\Theta} - 1 \right\}. \qquad \text{(Fig. 10)}$$

The last five functions have been plotted in terms of the parameters $k, \Theta, \lambda, \mu, \nu$ in the figures designated above. The parameters μ and ν have been defined as

$$\mu = \frac{2 \cdot \sin\Theta}{k} \qquad \text{and} \qquad \nu = \frac{2\tan\Theta}{k}.$$

11. First Limiting Case — Infinite Aspect Ratio ($k = \infty$). If the approximations which have been made in evaluating the integrals are still valid, we should get for this case the wellknown formula given by the Prandtl theory, namely $C_L = 2\pi\sin\alpha$ and thus $C_N = 2\pi\sin\alpha \cdot \cos\alpha$. We have for this case

$k = \infty \qquad F_1'(k) = .50$

$\mu = 0 \qquad A(\mu) = 0$

$\nu = 0 \qquad B(\nu) = 0$

$\lambda = 0 \qquad C(\lambda) = 0$

$$\therefore \frac{\gamma_0}{U} = 2 \cdot \sin\alpha$$

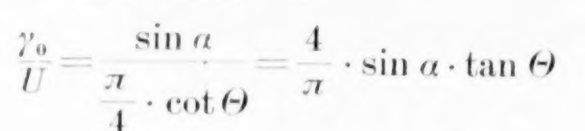
$$C_N = 2\pi \cdot \sin\alpha \left[\cos\alpha + \sin\alpha \cdot \tan\Theta - \frac{\tan\Theta}{2} \cdot 2\sin\alpha \right]$$

$$\text{or } \boxed{C_N = 2\pi \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}\,.$$

Thus we find that the normal force coefficient for the wing of infinite aspect ratio is given correctly. It is found to be independent of the angle Θ. This suggests that probably for finite but large aspect ratios the angle of the vortices Θ is not very important and that the Prandtl theory which assumes $\Theta = \alpha$ should therefore be a good approximation.

12. Second Limiting Case — Zero Aspect Ratio ($k = 0$). This case of zero aspect ratio corresponds to a wing of finite span but infinite chord. The leading edge is at $x = -\infty$, the trailing edge at $x = +\infty$. For this case our formulas reduce to

$$k = 0 \qquad F_1'(k) = 0$$



$$\frac{\gamma_0}{U} = \frac{\sin\alpha}{\frac{\pi}{4}\cdot\cot\Theta} = \frac{4}{\pi}\cdot\sin\alpha\cdot\tan\Theta$$

$$\frac{1}{\mu} = 0 \qquad A(\mu) = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{1}{\nu} = 0 \qquad B(\nu) = 0$$

$$\tan\Theta = \frac{\sin\alpha - \frac{2}{\pi}\cdot\sin\alpha\cdot\tan\Theta\cdot\left|\frac{\pi}{4}\cot\Theta\right|}{\cos\alpha + \frac{2}{\pi}\cdot\sin\alpha\cdot\tan\Theta\cdot\left|\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right|}$$

$$\frac{1}{\lambda} = 0 \qquad C(\lambda) = 0$$

$$\text{or}\quad \tan\Theta = \frac{\frac{\sin\alpha}{2}}{\cos\alpha + \sin\alpha\cdot\tan\Theta} = \frac{\frac{1}{2}}{\cot\alpha + \tan\Theta}.$$



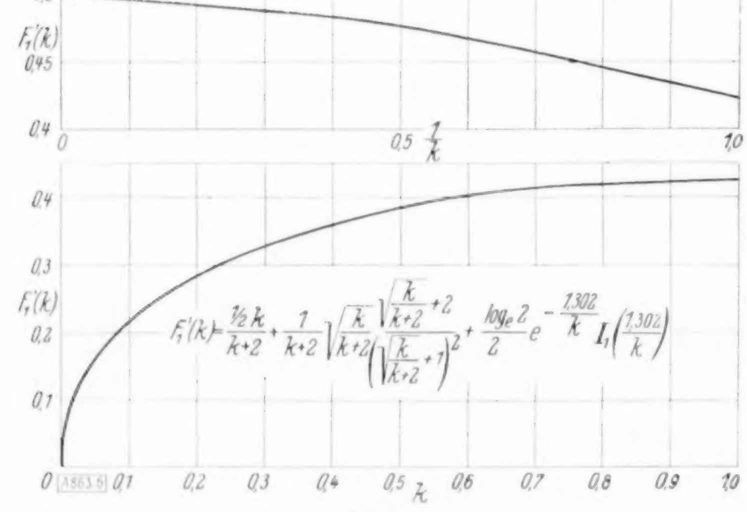


Fig. 6.

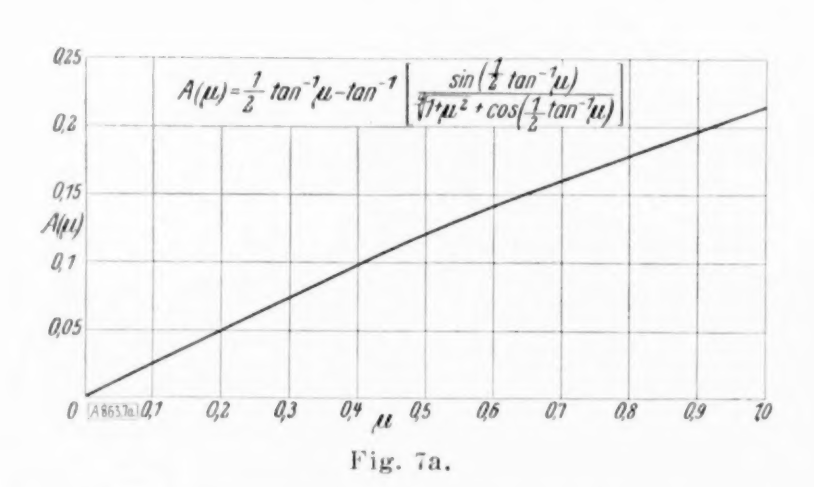


Fig. 7a.

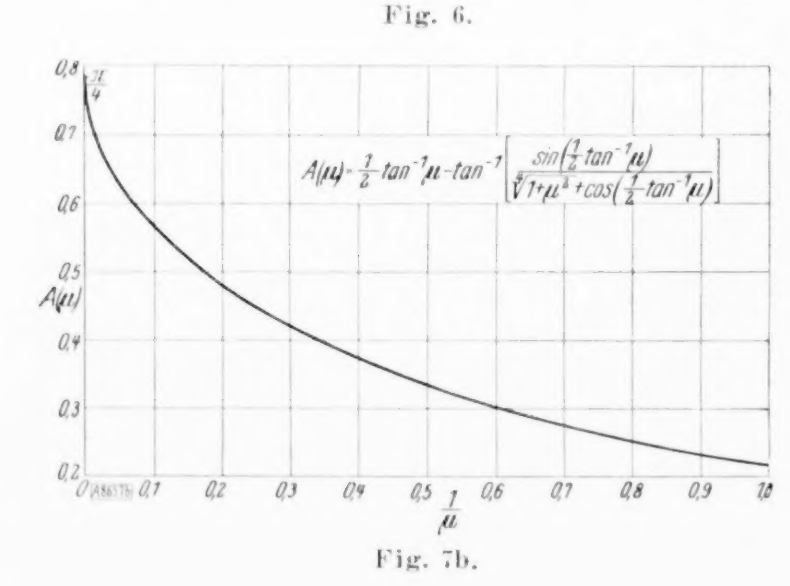


Fig. 7b.

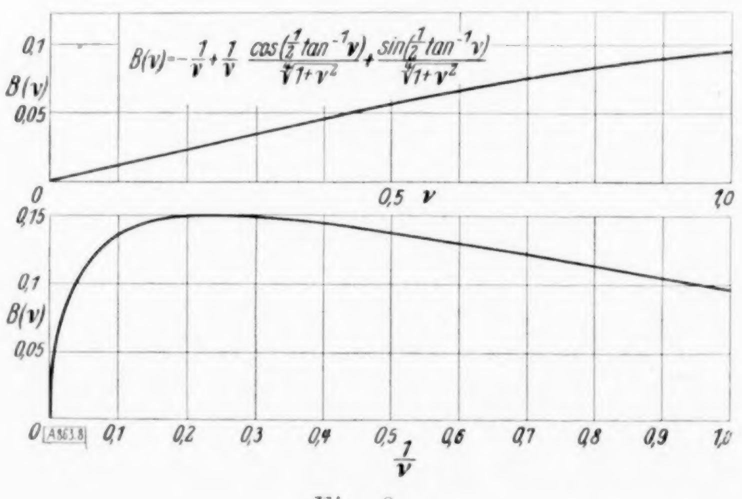


Fig. 8.

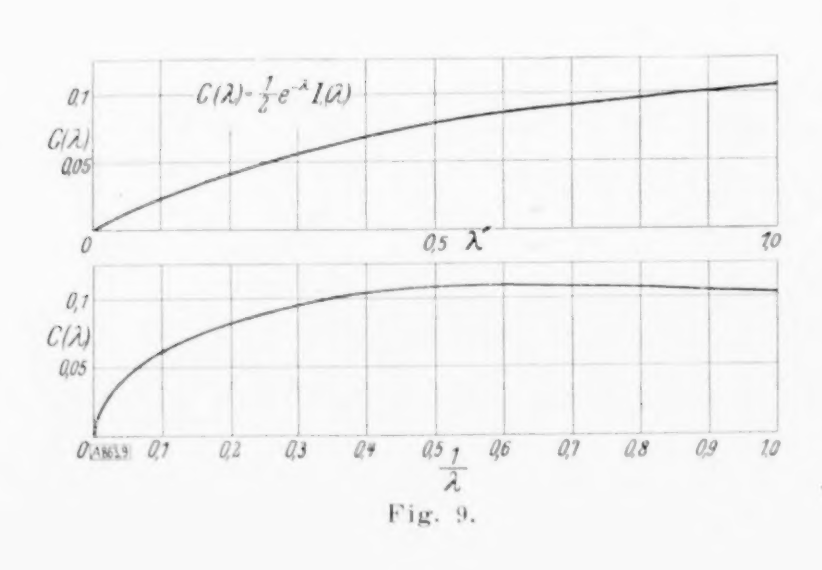


Fig. 9.

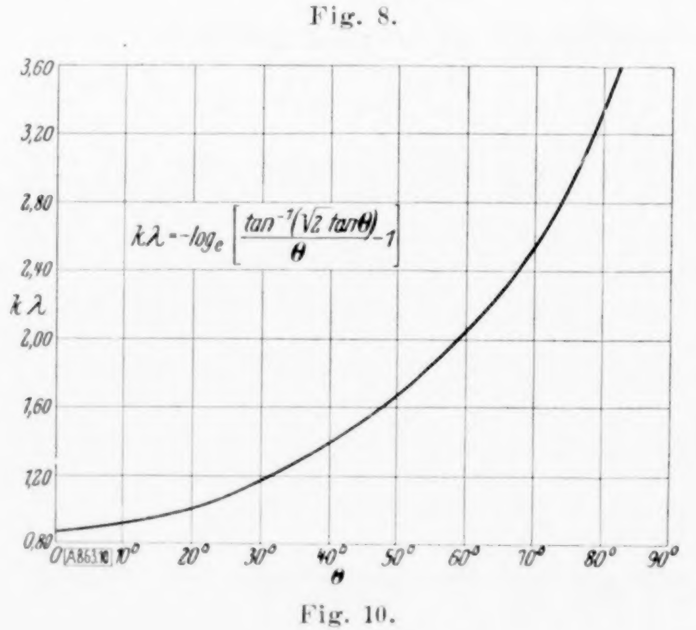


Fig. 10.

This last equation can be solved for $\tan\Theta$ and we obtain

$$\tan\Theta = -\frac{\cot\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\cot^2\alpha + 2}$$

and for the normal force coefficient

$$C_N = \pi \cdot \frac{4}{\pi}\sin\alpha \cdot \tan\Theta \cdot [\cos\alpha + \sin\alpha \cdot \tan\Theta] = 4\sin\alpha \cdot \tan\Theta \cdot \left|\frac{\sin\alpha}{2\tan\Theta}\right|$$

or

$$\boxed{C_N = 2\sin^2\alpha}\,.$$

This simple result is very interesting, for it indicates that the wing of very small aspect ratio behaves very much like the classical Newtonian flat plate which experiences a normal force proportional to the time rate of change of momentum of fluid particles hitting against it. The normal component of the velocity of these fluid particles would be $V = U \cdot \sin\alpha$, and thus if we assume inelastic impact, we get for the force N

$$N = \varrho\, V \cdot V \cdot S = 2\sin^2\alpha \cdot \frac{1}{2}\varrho\, U^2 \cdot S$$

$$C_N = 2\sin^2\alpha\,.$$

Experiments made by Winter have also shown that a $\sin^2$ law holds for wings of very small aspect ratio. Flügel [5] extrapolated the experimental values to zero aspect ratio and stated that the coefficient of $\sin^2\alpha$ is 2. Thus the present theory seems to check experimental values also for the second limiting case of $k = 0$.

It is clearly seen that the result in this case depends very much upon the angle Θ. This suggests, therefore, that for wings of small aspect ratio the assumption that the vortices leave at some angle to the wing is of basic importance. The result is that a nonlinear theory such as the present one is required to get at the fundamental behavior of such wings.

The results for the case of $k = 0$ can also be derived from very simple direct considerations. These are given in the appendix.

13. Results and Comparison with Experiment: We have already seen that the present theory gives the correct result for the normal force coefficient in the limiting cases of zero and of infinite aspect ratio. For intermediate aspect ratios, the agreement of the present theory with the experimental results of Winter [3] and Zimmerman [6] is shown in Figs. 11 and 12. The curves obtained by the lifting-line theory are also plotted for comparison, though it is, of course, understood that this theory was never expected to be applied to the very small aspect ratio wings. Conversely, the results obtained using the present theory are shown for aspect ratios as large as $k = 6$, even though it is clear that some of the basic assumptions do not hold any longer.

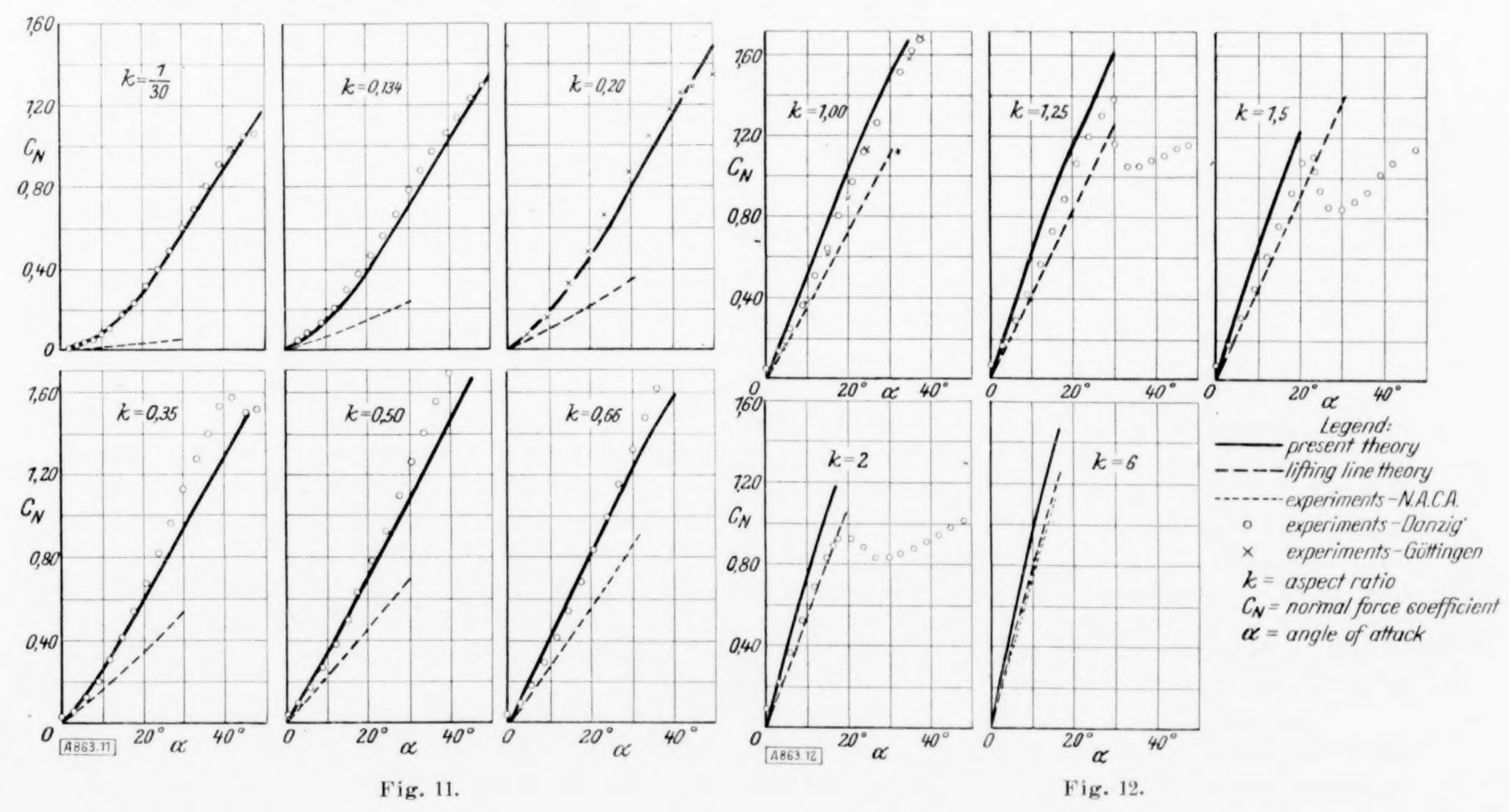


Fig. 11. Fig. 12.

For the very small aspect ratios of $k = 1/30$ and $k = .134$, the theory gives the shape of the C_N vs. α curve very nicely. The theoretical values agree within about 5% with the experimental ones. For the larger aspect ratios of $k = .20$, .35 and .50, the present theory gives at least the order of magnitude, the maximum discrepancies with experiment being of the order of 20%. This is probably due to the approximation used for the angle Θ at which the trailing vortices leave. As Fig. 13 shows, there is a peculiar increase of the value of Θ as a function of k, with a maximum value somewhere near $k = .35$. Perhaps a better method of determination of the mean value for Θ will improve the agreement with experiment. It is to be noted that even for these very small aspect ratios, the initial tangent already begins to agree with the lifting-line theory. This tendency increases with increasing aspect ratios $k = .66$, 1, and up. At $k = .66$ the theoretical curve begins to be too high rather than too low as it was for the smaller aspect ratios. At $k = 1$, it is uniformly about 10% too large, while the lifting-line theory gives the initial tangent quite closely but then departs and gives results as much as 20% too low. For $k = 1.25$ and 1.5, the experimental points lie somewhere between the present theory and the lifting-line theory results. At $k = 2$, the lifting theory fits already pretty well, and of course very well at $k = 6$. For these larger aspect ratios, the present theory gives values about 25% too high. It would not be expected to hold, since the assumption of a constant lift distribution across the span breaks down. Also the approximation used in expanding the integrals $F_1(k)$ and $F_3(k, \Theta)$ become less satisfactory at large aspect ratios.

It is interesting to consider the validity of the fundamental assumptions used in the present analysis. The assumption of a constant lift and constant downwash across the span is verified exactly for the case $k = 0$ in the appendix. However, pressure measurements made by Winter (Fig. 14) show that even at $k = 1$ the assumption of a constant lift across the span is still a good approximation. Thus it should be good at least in the interval $0 < k < 1$. The assumption for the vorticity distribution along the chord $\gamma = \gamma_0 \sqrt{\frac{t/2 - x}{t/2 + x}}$ also appears

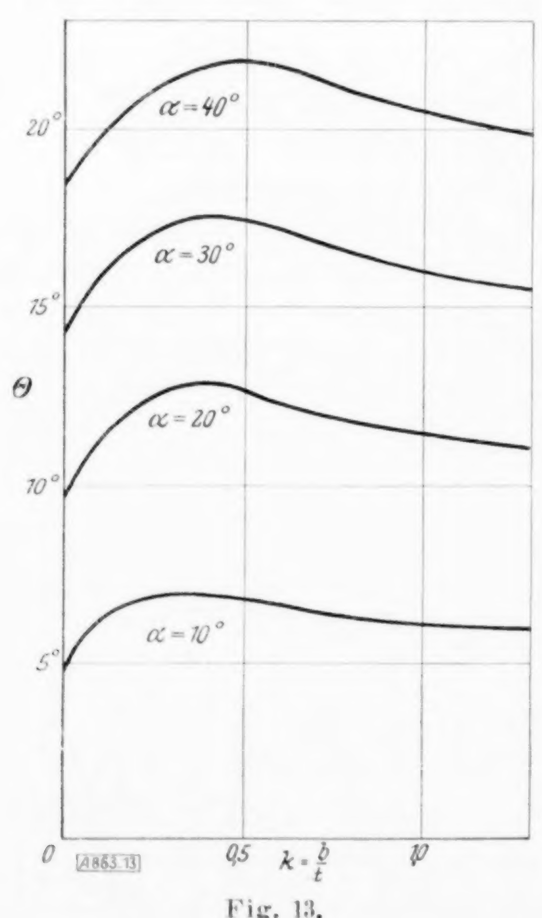


Fig. 13.

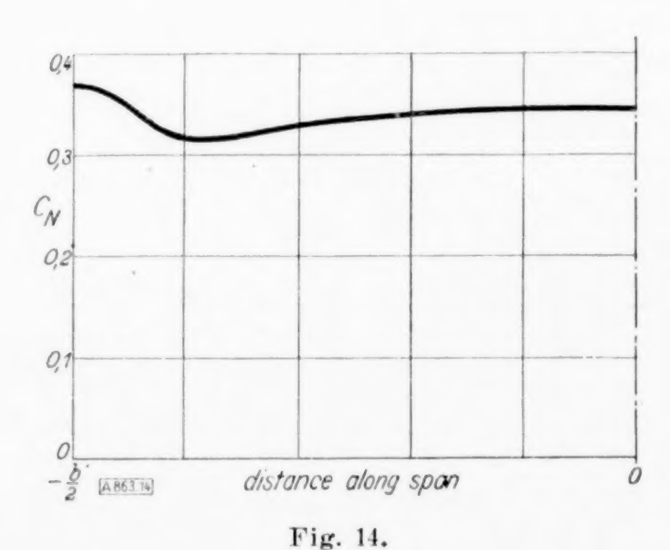


Fig. 14.

reasonable from Winter's measurements at $k = 1$. The actual pressure distributions showed very great suction peaks at the leading edge as postulated by the theory. In addition, they showed, however, smaller peaks near the sides and at the trailing edge, which have not been included in the theory. The measured pressure distributions indicated a considerable variation with the angle of attack. This has not been taken into account in our theory. It indicates that the true solution of the integral equation for $\gamma(\xi)$ is probably quite complicated. For this reason, the assumption of some mean distribution function such as $\gamma = \gamma_0 \sqrt{\frac{t/2 + x}{t/2 - x}}$ is probably as good an approach as can be made theoretically.

The assumption that for small aspect ratios the vortices leave at some angle to the plate seems also to be verified by flow pictures taken by Winter. He finds that for very small angles of attack, a smooth Prandtl theory type flow takes place. This checks the

fact that the lifting-line theory gives the initial tangent of the C_N vs. α curves. At larger angles, however, a strong tip flow occurs with vortices leaving the plate at the sides. These vortices actually roll up immediately into a single vortex core, and according to Winter leave at approximately the angle of attack. The two vortex sheets which we assumed in our theory are apparently unstable; their effects are, however, approximately equivalent to the single vortex core, as is seen by the agreement between theory and experiment.

14. Conclusion. The present discussion seems to show definitely that the flow about wings of small aspect ratio is not purely a stalling phenomenon, but is amenable to treatment by the perfect fluid theories. A non-linear theory is required, however, whose basic difference from previous wing theories consists in the fact that the trailing vortices are assumed to leave the plate at an angle Θ which is determined approximately from the Helmholtz vortex laws. For the limiting case of zero aspect ratio, this theory gives a „Newtonian" type law for the normal force coefficient, namely $C_N = 2\sin^2\alpha$. For the limiting case of infinite aspect ratio, it gives the result of the Prandtl lifting-line theory, $C_N = 2\pi\sin\alpha\cdot\cos\alpha$. For intermediate aspect ratios, the theory gives the transition from the first type flow to the second. The agreement with experiments is quite good for very small aspect ratios and fair for the larger ones.

B. Appendix: Rectangular Wing of Zero Aspect Ratio (finite span & infinite chord).

Considering a wing of very large chord t where $t \to \infty$, the vorticity distribution function $\gamma = \gamma_0 \sqrt{\frac{t/2 - x}{t/2 + x}} = \gamma_0 \sqrt{\frac{1 - x/t/2}{1 + x/t/2}}$ gives $\gamma \to \gamma_0$ as $t \to \infty$. For a wing of very small aspect ratio ($k \doteq 0$), the bound vorticity has then essentially a constant distribution along the chord. We may assume, however, that the region is still singly connected since we still have a definite leading and trailing edge. Thus in calculating the force on the wing, the Bernoulli constants of the region inside and outside the vortex wake are still the same and the formula for the force on a vortex $F = \varrho V \Gamma$ may still be used.

For our vortex system replacing the wing, we assume again a system of bound vortices lying in the wing, with straight trailing vortices coming off at each end of the span. The bound vortices are assumed to have a constant strength along the span and the same value γ_0 at every point on the chord. The trailing vortices again lie at an undetermined inclination Θ with respect to the plate.

The velocity induced by this vortex system can be written down at once. Evidently the contributions of the bound vortices normal to the plate cancel at every point. However, they induce a velocity tangential to the plate, namely $\frac{\gamma_0}{2}$ on the upper surface and $-\frac{\gamma_0}{2}$ on the lower. The induced velocity due to the trailing vortices is the same as if they were arranged as starting from a vertical plane through the origin and had a strength per unit height of $\frac{\gamma_0}{\sin\Theta}$. For the contribution normal to the wing of a vortex segment AB is exactly the same as if it were placed along $A'B'$. Thus we get the equivalent trailing vortex system shown, consisting of two semi-infinite walls of vortices. The downwash due to this semi-infinite system of vortices at any point along $00'$ is just half that of a doubly infinite system. This latter has a uniform downwash $\frac{\gamma_0}{\sin\alpha}$ everywhere between the two walls of vortices, and zero outside. Thus the trailing vortex system of our wing has a uniform downwash at every point of the span. This downwash is

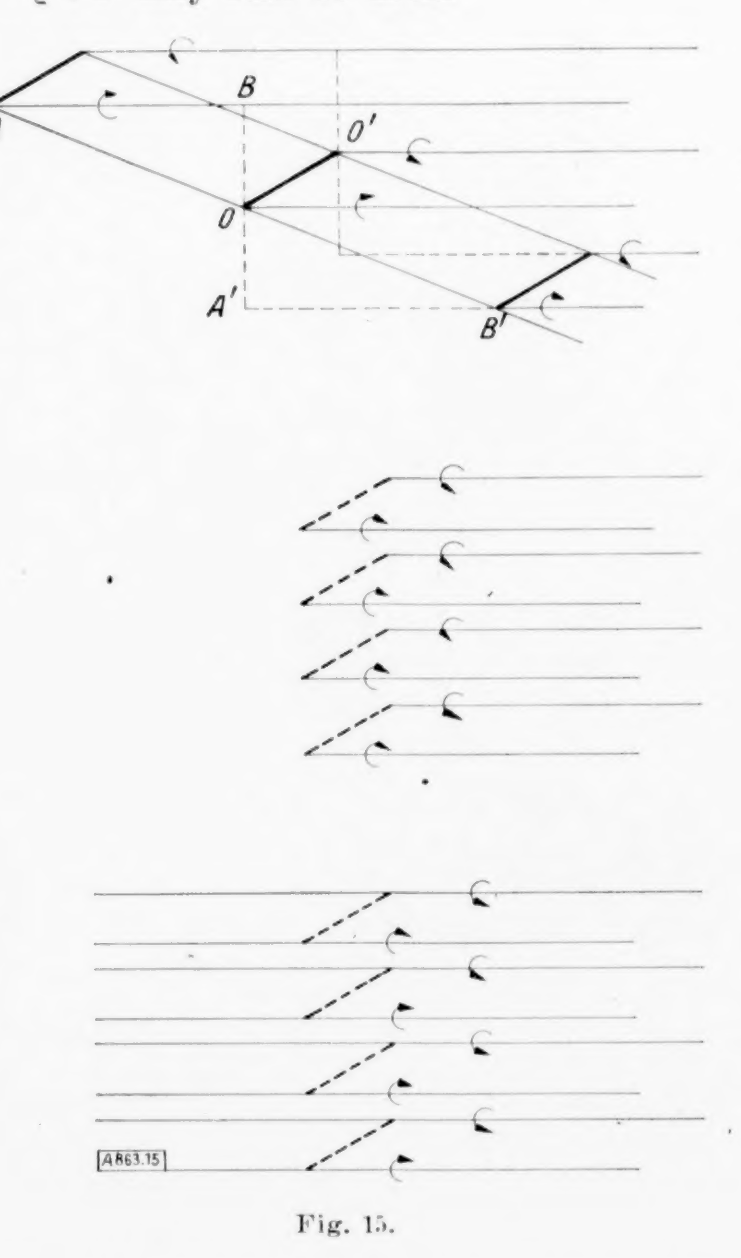


Fig. 15.

perpendicular to the vortices and thus the component of the induced velocity along the plate is $u = \frac{\gamma_0}{2 \cdot \sin \Theta} \cdot \sin \Theta = \frac{\gamma_0}{2}$, the component normal to the plate is $w = \frac{\gamma_0}{2 \cdot \sin \Theta} \cdot \cos \Theta$.

If the wing moved through the air with a velocity U at an angle of attack α, the component of the velocity normal to the wing is $U \sin \alpha$. Our boundary condition is now as before, that the velocity induced by the vortices normal to the wing is just equal to $U \sin \alpha$, i. e.

$$\frac{\gamma_0}{2} \cdot \cot \Theta = U \cdot \sin \alpha$$

or

$$\gamma_0 = 2\,U \cdot \sin \alpha \cdot \tan \Theta .$$

In order to determine the angle Θ as a function of α, it is necessary to have expressions for the velocity field due to the vortex system at an arbitrary point. This is determined by the use of the Biot-Savart Law, similarly as for the case of the finite wing. Letting

u = velocity along chord x

v = velocity along span y

w = velocity along normal to wing z

$(\ )_i$ = velocity inside vortex wake

$(\ )_o$ = velocity outside vortex wake

the results obtained are

$$u_i = \gamma_0 \quad \text{for} \quad |y| < \frac{b}{2}$$

$$u_o = 0 \quad\quad |y| > \frac{b}{2}$$

$$v = \gamma_0 \cdot \frac{\cot \Theta}{2\pi} \cdot \log \frac{\sqrt{\left(\frac{b}{2} - y\right)^2 + z^2}}{\sqrt{\left(\frac{b}{2} + y\right)^2 + z^2}} \quad \text{for} \quad \text{all } y$$

$$w_i = -\frac{\gamma_0 \cdot \cot \Theta}{2\pi} \left[\pi + \tan^{-1} \frac{z}{\frac{b}{2} + y} + \tan^{-1} \frac{z}{\frac{b}{2} - y}\right] \quad \text{for} \quad |y| < \frac{b}{2}$$

$$w_o = -\frac{\gamma_0 \cdot \cot \Theta}{2\pi} \left[\tan^{-1} \frac{z}{|y| + \frac{b}{2}} - \tan^{-1} \frac{z}{|y| - \frac{b}{2}}\right] \quad \text{for} \quad |y| > \frac{b}{2} .$$

The angle Θ is determined by the condition that the vortex lines follow the streamlines. As an approximation, we shall assume that the vortex sheets remain in vertical planes through the sides of the wing, i. e. we neglect the v-component of the velocity normal to the vortex sheet. The inclination of the vortex filaments is then given by the equation

$$\tan \Theta = \frac{w_{\text{mean}}]_{y=b/2}}{u_{\text{mean}}]_{y=b/2}},$$

where

$$w_{mean}]_{y=b/2} = \frac{w_i + w_o}{2} + U \cdot \sin \alpha = \frac{U \cdot \sin \alpha}{2} \left[1 - \frac{2}{\pi} \cdot \tan^{-1} \frac{z}{b}\right]$$

$$u_{\text{mean}}]_{y=b/2} = \frac{u_i + u_o}{2} + U \cdot \cos \alpha = U \cdot \cos \alpha + U \cdot \sin \alpha \cdot \tan \Theta .$$

Thus

$$\tan\Theta = \frac{\frac{U\cdot\sin\alpha}{2}\left[1-\frac{2}{\pi}\cdot\tan^{-1}\frac{z}{b}\right]}{U\cdot\cos\alpha+U\cdot\sin\alpha\cdot\tan\Theta}$$

or

$$\tan\Theta = -\frac{\cot\alpha}{2}+\frac{\cot\alpha}{2}\sqrt{1+2\tan^2\alpha\left[1-\frac{2}{\pi}\tan^{-1}\frac{z}{b}\right]}.$$

The trailing vortices thus are not actually straight lines but lie along curved paths which, at a great distance behind the wing, are parallel to the wing. This contradiction with our original assumptions arises out of the fact that we have in part violated the Helmholtz condition that the vortices follow the fluid particles. It will be remembered that the Prandtl wing theory which assumes the trailing vortices to be carried along the direction of the undisturbed flow similarly violates the Helmholtz conditions. It thus seems justifiable to retain the assumption that our trailing vortices follow straight lines at some effective inclination Θ with respect to the plate. For this effective inclination we shall choose the inclination near $z=0$, since the vortices near the plate are the most effective in inducing the normal velocity at the plate. In other words, we shall assume that for our wing of zero aspect ratio

$$\tan\Theta = -\frac{\cot\alpha}{2}+\frac{\cot\alpha}{2}\sqrt{1+2\tan^2\alpha}.$$

The normal force acting on the wing can now be determined from the formula for the force on a vortex. We obtain for the normal force per unit length along the chord

$$N=\varrho\,(U\cdot\cos\alpha+u_p)\cdot\gamma_0\cdot b\,,$$

where

$$u_p = \text{induced } u\text{-velocity at plate} = \frac{\gamma_0}{2}$$

$$\gamma_0 = 2\,U\cdot\sin\alpha\cdot\tan\Theta$$

and

$$C_N=\frac{N}{\frac{1}{2}\varrho\,U^2\cdot b}$$

$$\therefore\ \boxed{C_N = 2\sin^2\alpha}\,.$$

Thus we again obtain the same result as before for the normal force coefficient. In addition, we now have a picture of the velocity field corresponding to the wing of zero aspect ratio. This seems to indicate that our violation of the Helmholtz condition for the cross-flow v has resulted in an internal contradiction concerning the shape of the vortex lines. It seems hopeless to try to calculate the induced velocities corresponding to vortices lying along a curved surface as is actually the case. The most we might expect to do in a refinement of this theory is to obtain a better approximation for the effective angle Θ at which a system of equivalent straight trailing vortices leaves the wing. 863

References.

[1] Birnbaum, W.: ZAMM, Vol. 3, p. 290 (1923).
[2] Blenk, H.: ZAMM, Vol. 5, p. 36 (1925).
[3] Winter, H.: Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Vol. 6, B, p. 40 (1935) (Translated as NACA Tech. Mem. No. 798).
[4] Glauert, H.: The Elements of Airfoil and Airscrew Theory p. 128.
[5] Flügel, G.: Schiffbau, Vol. 30, p. 336 (1929).
[6] Zimmerman, C. H.: NACA Technical Report No. 431, NACA Technical Note No. 539.

Über die zahlenmäßige Beherrschung und Anwendung einiger den Besselschen verwandten Funktionen nebst Bemerkungen zum Gebiet der Besselfunktionen[1].

Von *Reinhard Müller* in Berlin.

Übersicht. Die vorliegende Arbeit bringt Zahlentafeln für die Integrale der Besselschen und Hankelschen Funktionen erster Art, nullter Ordnung für rein imaginäre Argumente $z = i\,x$, sowie für eine Funktion $\varphi(x)$ nebst Ableitung $\frac{d\varphi}{dx}$, die in der Theorie der Tragflügelschwingungen auftritt.

Es wird eine größere Anzahl von Funktionen in Integralform angegeben, die mit Hilfe dieser Zahlentafeln zugänglich geworden ist. So ergibt sich u. a. die Klasse der Struveschen Funktionen für halbzahlige Parameter $2\nu = 0, 1, 2 \ldots$

Ferner wird die Lösung der inhomogenen Besselschen Differentialgleichung für eine Störungsfunktion in Form einer Potenzreihe mit ganzen positiven und negativen Exponenten auf die Zahlentafeln zurückgeführt und gezeigt, daß dies für die praktische Durchrechnung des Problems der erzwungenen Schwingungen elastischer Körper von zylindrischer Gestalt von Nutzen ist.

Schließlich werden einige Typen von Differentialgleichungen aufgestellt, die sich auf die Besselsche Gleichung zurückführen lassen.

Zusammenstellung der verwendeten Bezeichnungen.

$$\varphi(z) = \int_0^{\pi/2} e^{-z \sin t}\, dt \quad \ldots \quad \text{I, Gl. (1)},$$

$$F^{\alpha,\beta,\delta_1,\delta_2}_{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2}(z) = \int_0^{\pi/2} \sin^{\alpha_1}(\alpha t)\cos^{\alpha_2}(\beta t)\sin^{\beta_1}(z \sin t + \delta_1 t)\cos^{\beta_2}(z\sin t + \delta_2 t)\, dt \quad . \text{ IV, Gl. (17)},$$

$$f_{\nu,\mu}(z) = \int_0^{\pi/2} \sin^{\nu} t \cos^{\mu} t\, e^{z \sin t}\, dt \quad \ldots \quad \text{IV, Gl. (18)},$$

$$h_{\nu}(x) = \int_0^{\pi/2} \sin^{\nu} t\, e^{-\frac{x}{\sin t}}\, dt, \qquad x \text{ reell} > 0 \quad \ldots \quad \text{IV, Gl. (40)},$$

$$w_{\nu}(z) = Z_{\nu}(z) = c_1 J_{\nu}(z) + c_2 H_{\nu}^{(1)}(z).$$

I. Zurückführung eines Integrals aus der Theorie der Tragflügelschwingungen auf Besselsche Funktionen. In einer im Flugtechnischen Institut der Technischen Hochschule Berlin durchgeführten Untersuchung über Tragflügelschwingungen (v. Borbely*) trat das Integral

$$\varphi_s(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\sqrt{x^2 + \omega^2}}\, d\omega, \qquad x > 0$$

auf. Ergänzt man $\varphi_s(x)$ durch

$$\varphi_c(x) = i\,\frac{\pi}{2}\, H_0^{(1)}(i\,x) = \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega}{\sqrt{x^2 + \omega^2}}\, d\omega$$

und integriert die Funktion $\varphi_c(x) + i\,\varphi_s(x)$ über den ersten Kreisquadranten der komplexen $\frac{\omega}{x}$-Ebene, so findet man die für $x \geqq 0$ geltende Beziehung

$$\varphi_s(x) = \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t}\, dt.$$

[1]) Dissertation, genehmigt von der Fakultät für Allgemeine Wissenschaften der Techn. Hochschule Berlin, hervorgegangen aus einer im Flugtechn. Institut (Prof. Dr.-Ing. H. Wagner) durchgeführten Arbeit.

*) Vgl. diese Zeitschrift Bd. 18 (1938), Heft 6.

Wir betrachten etwas allgemeiner

$$\varphi(z) = \int_0^{\pi/2} e^{-z \sin t}\, dt \qquad (z = x + i\, y) \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

$\varphi(z)$ befriedigt die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 w}{d z^2} + \frac{1}{z}\frac{d w}{d z} - w + \frac{1}{z} = 0 \qquad w(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \left(\frac{d w}{d z}\right)_{z=0} = -1 \quad \ldots \ldots \quad (2).$$

Durch „Variation der Konstanten“ erhält man als Lösung von (2)

$$\varphi(z) = J_0(i z)\left\{\frac{\pi}{2} - \int_0^z i \frac{\pi}{2} H_0^{(1)}(i \xi)\, d\xi\right\} + i \frac{\pi}{2} H_0^{(1)}(i z)\int_0^z J_0(i \xi)\, d\xi \quad \ldots \ldots \quad (3).$$

Hieraus folgt durch Differentiation

$$\frac{d\varphi}{d z} = - i J_1(i z)\left\{\frac{\pi}{2} - \int_0^z i \frac{\pi}{2} H_0^{(1)}(i \xi)\, d\xi\right\} + \frac{\pi}{2} H_1^{(1)}(i z)\int_0^z J_0(i \xi)\, d\xi \quad \ldots \quad (4).$$

Für die Funktionen (3) und (4) findet man im Anhang Tafeln für $z = x$; für $z = i x$ gibt es bereits Zahlentafeln[2]).

II. Mehrfache Quadraturen über die Besselschen Funktionen. Setzt man in der Besselschen Differentialgleichung

$$\frac{d^2 w}{d z^2} + \frac{1}{z}\frac{d w}{d z} + w\left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (5),$$

den Parameter $\nu = 0$, so bekommt man

$$\frac{d}{d z}\left(z \frac{d w}{d z}\right) + z w = 0 \quad \ldots \ldots \quad (6).$$

Durch zunächst zweimaliges Integrieren von (6) erhält man

$$z \frac{d w}{d z} = - z \int w\, d z + \int\int w\, d z\, d z \quad \ldots \ldots \quad (7),$$

$$z w - \int w\, d z = - z \int\int w\, d z\, d z + 2 \int\int\int w\, d z\, d z\, d z \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

usw.

Die Lösung von (6) entsteht durch lineare Kombination von $w = J_0(z)$, $H_0^{(1)}(z)$. Für die Funktionen w und für $\frac{d w}{d z} = - w_1 = - J_1(z)$, $- H_1^{(1)}(z)$ sind Zahlentafeln für $z = x$ und $z = i x$ vorhanden. Die Funktionen $\int w\, d z = \int J_0(z)\, d z$, $\int H_0^{(1)}(z)\, d z$ sind für $z = x$ bei Watson tabelliert[3]), bzw. auf andere Tafeln dieses Werkes zurückgeführt; für $z = i x$ veröffentliche ich Zahlentafeln am Schluß der Arbeit.

Wiederholte Quadraturen über die Besselschen und Hankelschen Funktionen nullter und erster Ordnung kann man also nach (7) und (8) auf tabellierte Funktionen zurückführen. Allgemein lassen sich sogar μ-fache Quadraturen über $Z_\nu(z)$ durch tabellierte Funktionen ausdrücken.

$$\nu = \ldots -1, 0, 1, \ldots, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, \qquad z = x \text{ oder } z = i x, \qquad w = Z_\nu(z) = c_1 J_\nu(z) + c_2 H_\nu^{(1)}(z)$$

befriedigt nämlich die Differentialgleichung

$$\frac{d}{d z}\left(z \frac{d w}{d z}\right) + w z\left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (9).$$

---

[2]) Watson: A Treatise on the theory of Bessel Functions, Cambridge, 1922; im folgenden als „Watson“ bezeichnet.

$$\varphi(i x) \equiv \frac{\pi}{2}\left(J_0(x) - i H_0(x)\right), \qquad \frac{d}{d x}\left(\varphi(i x)\right) \equiv - \frac{\pi}{2} J_1(x) + i\left(\frac{\pi}{2} H_1(x) - 1\right).$$

$H_0(x)$ und $H_1(x)$ sind bei Watson tabelliert, Tafel I, S. 666/7 ff.

[3]) Watson, S. 752.

Durch Integration von (9) erhält man

$$z\frac{d w}{d z} = -z\int w\, d z + \int\int w\, d z\, d z + \nu^2 \int \frac{w}{z}\, d z \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Man kann aus (10) $\int \frac{w_\nu}{z}\, d z$ für $\nu = 1, 2, ..$ berechnen, falls man $\int w_\nu\, d z$ und $\int\int w_\nu\, d z\, d z$ schon kennt.

Ferner gilt bekanntlich

$$w_{\nu-1} + w_{\nu+1} = 2\nu \frac{w_\nu}{z} \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

oder integriert

$$\int w_{\nu-1}\, d z + \int w_{\nu+1}\, d z = 2\nu \int \frac{w_\nu}{z}\, d z \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Aus (11) erhält man durch Multiplikation mit z und nachfolgendes Integrieren

$$z\int w_{\nu-1}\, d z - \int\int w_{\nu-1}\, d z\, d z + z\int w_{\nu+1}\, d z - \int\int w_{\nu+1}\, d z\, d z = 2\nu \int w_\nu\, d z \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Wiederholte Quadraturen über w_0 und w_1 waren auf Zahlentafeln zurückgeführt. Für $\nu = 1$ liefert daher Gl. (10) $\int \frac{w_1}{z}\, d z$. Darauf erhält man aus (12) $\int w_2\, d z$ und aus (13) $\int\int w_2\, d z\, d z$. Setzt man $\nu = 1, 2, ..,$ so bekommt man wiederholte Quadraturen über $w_\nu(z)$. Um eine μ-malige Quadratur über $w_\nu(z)$ zu erhalten, multipliziere man (11) mit $z^{\mu-1}$ und integriere danach mehrmals partiell, wie das für $\mu = 2$ in Gl. (13) geschah.

Negative ν erledigen sich durch die Beziehung

$$w_{-\nu}(z) = (-1)^\nu w_\nu(z).$$

III. Das Integral $\int z^\lambda w_\nu(z)\, d z$ und die Integrale $\int \cos z\, J_\nu(z)\, d z$, $\int \sin z\, J_\nu(z)\, d z$ für $\lambda, \nu = ... -1, 0, 1 ...$

$$w_\nu(z) = c_1 J_\nu(z) + c_2 H_\nu^{(1)}(z), \qquad \lambda, \nu = .. -1, 0, 1 .., \qquad z = x \text{ und } z = i\,x.$$

Für positive ganze λ kann man $\int z^\lambda w_\nu\, d z$ durch λ-malige partielle Integration[4]) zurückführen auf wiederholte Quadraturen über $w_\nu(z)$, die in II behandelt wurden. Man kann für $\lambda = 1, 2, ..$ auch zunächst der Rekursionsformel[5])

$$\int z^{\lambda+1} w_\nu\, d z = (\nu^2 - \lambda^2)\int z^{\lambda-1} w_\nu\, d z + z^{\lambda+1} w_{\nu+1} + (\lambda - \nu) z^\lambda w_\nu \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

folgen, die das linksstehende Integral für ungerade λ auf $\int w_\nu\, d z$, für gerade λ auf

$$\int z\, w_\nu\, d z = z\int w_\nu\, d z - \int\int w_\nu\, d z\, d z$$

zurückführt und erst jetzt nach II weiter verfahren. Im Falle $\lambda = \pm\nu$ ist (14) zu benutzen. Der Fall positiver ganzzahliger λ ist hiermit erledigt.

(12) führt $\int \frac{w_\nu}{z}\, d z$ für $\nu = 1, 2, ..$ auf tabellierte Funktionen zurück. Wir nehmen vorübergehend an, die Funktion $\int \frac{w_0}{z}\, d z$ sei tabelliert. Division von (11) durch z und nachfolgendes Integrieren liefert $\int \frac{w_\nu}{z^2}\, d z$ für $\nu = 1, 2, ..,$ während sich $\int \frac{w_0}{z^2}\, d z$ aus der Gleichung

$$\int \frac{w_1}{z^\lambda}\, d z = -\frac{w_0}{z^\lambda} - \lambda \int \frac{w_0}{z^{\lambda+1}}\, d z \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

für $\lambda = 1$ ergibt. Dividiert man jetzt (11) durch z^2 und integriert danach, so ergibt sich $\int \frac{w_\nu}{z^3}\, d z$ für $\nu = 1, 2, ..,$ während man dieses Integral für $\nu = 0$ aus (15) mit $\lambda = 2$ erhält. Fährt man so fort, so zeigt sich, daß sich das Integral $\int \frac{w_\nu}{z^k}\, d z$ für $k = 1, 2, 3, ...$ auf die Tabellierung von $\int \frac{w_0}{z}\, d z$ reduziert.

---

[4]) Die partielle Integration ist so auszuführen, daß sich der Exponent der Potenz bei jedem Schritt um 1 erniedrigt.
[5]) Siehe z. B. Watson, S. 132 bis 133.

Diese Tabelle ist aber zur Zeit noch nicht berechnet. Daher werde noch untersucht, was die vorhandenen Zahlentafeln leisten. (11) zeigt, daß sich $\int \frac{w_\nu}{z^\mu} d z$ für $\nu = \mu, \mu + 1, \ldots$, d. h. für $\mu \leq \nu$ (μ, ν ganz) durch Tabellen ausdrücken läßt. Insbesondere ist dies also bei $\int \frac{w_\mu}{z^\mu} d z$ der Fall. Setzt man hier $\mu = 1$, so liefert (15) für $\lambda = 1$ das Integral $\int \frac{w_0}{z^2} d z$. Man setze jetzt in (11) $\nu = 1$, dividiere durch z^2 und integriere danach, sodann setze man $\nu = 2$, dividiere durch z^3 und integriere, bis man die ν-te derartige Gleichung nach Division durch $z^{\nu+1}$ integriert. Man erhält so $\int \frac{w_\nu}{z^{\nu+2}} d z$. Setzt man hier $\nu = 1$, so liefert (15) für $\lambda = 3$ das Integral $\int \frac{w_0}{z^4} d z$. Dividiert man nun (11) für $\nu = 1$ durch z^4 und integriert dann, ..., bis man die ν-te derartige Gleichung nach Division durch $z^{\nu+3}$ integriert, so erhält man $\int \frac{w_\nu}{z^{\nu+4}} d z$. Die Integrale $\int \frac{w_\nu}{z^{\nu+2k}} d z$ und nach früherem auch $\int \frac{w_\nu}{z^{\nu-k}} d z$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$ sind somit auf heute berechnete Zahlentafeln zurückgeführt.

Integrale der Form

$$\int z^\mu \int w_\nu \, d z \, d z = \frac{z^{\mu+1}}{\mu+1} \int w_\nu \, d z - \frac{1}{\mu+1} \int z^{\mu+1} w_\nu \, d z$$

beherrscht man ebenfalls. ($\mu + 1 \neq 0$.) Unsere Integrale sind auch bei jeder Funktion $f(z)$, die durch eine Reihe positiver und negativer Potenzen approximiert werden kann, für das Integral

$$\int f(z) \, w_\nu(z) \, d z$$

von Nutzen. Bisweilen führt aber ein Kunstgriff schneller zum Ziel. Hierfür als Beispiel

$$F(t) = \int_0^t \cos z \, J_0(z) \, d z .$$

Mit

$$G(t) = \int_0^t \sin z \, J_0(z) \, d z$$

wird

$$F + i \, G = e^{it} \int_0^t \cos(z-t) \, J_0(z) \, d z + e^{it} \, i \int_0^t \sin(z-t) \, J_0(z) \, d z = e^{it} \left(f(t) + i \, g(t)\right).$$

f und g genügen dem System $f'' + f = J_0'$, $\quad g' + f = 0$

$$f(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t + t \, J_0(t).$$

Wegen $f(0) = 0$ und $f'(0) = J_0(0)$ ist $C_1 = C_2 = 0$.

$$g(t) = -\int_0^t t \, J_0(t) \, d t = -t \int_0^t J_0(t) \, d t + \int_0^t \int_0^t J_0(t) \, d t \, d t .$$

Hiermit ist alles auf Tabellen zurückgeführt. Man findet schließlich

$$\int_0^t \cos z \, J_0(z) \, d z = t \left[\cos t \, J_0(t) + \sin t \, J_1(t)\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16).$$

(Übrigens sind auch $\int_0^t \cos z \, J_\nu(z) \, d z = F_\nu(t)$ und $\int_0^t \sin z \, J_\nu(z) \, d z = G_\nu(t)$ für $\nu = \ldots -1, 0, 1 \ldots$ auf bekannte Funktionen zurückführbar. Man kennt F_0, G_0 und erhält wegen $J_1 = -J_0'$ durch partielle Integration auch F_1, G_1. Aus der Funktionalgleichung $J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) = 2 \, J_\nu'(z)$ gewinnt man leicht die Beziehungen

$$F_{\nu+1}(t) = F_{\nu-1}(t) + 2 \left(J_\nu(0) - G_\nu(t) - \cos t \, J_\nu(t)\right),$$

$$G_{\nu+1}(t) = G_{\nu-1}(t) + 2 \left(F_\nu(t) - \sin t \, J_\nu(t)\right).$$

Hier hat man nur der Reihe nach $\nu = 1, 2 \ldots$ zu setzen. Die Integrale

$$\int \cos z \, H_\nu^{(1)}(z) \, d z , \qquad \int \sin z \, H_\nu^{(1)}(z) \, d z$$

erledigt man ganz entsprechend, jedoch ist die Singularität von $H_\nu^{(1)}$ bei $z = 0$ zu beachten.)

IV. Weitere Funktionen in Integralform, die mit Hilfe der Zahlentafeln des Anhangs zugänglich geworden sind. Zunächst sei angeführt

$$F^{a,\beta,\delta_1,\delta_2}_{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2}(z)=\int_0^{\pi/2}\sin^{\alpha_1}(a\,t)\cos^{\alpha_2}(\beta\,t)\sin^{\beta_1}(z\sin t+\delta_1\,t)\cos^{\beta_2}(z\sin t+\delta_2\,t)\,d\,t \quad . \quad . \quad (17),$$

$$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2=0,1,2\ldots, \qquad a,\beta,\delta_1,\delta_2=\ldots-1,0,1\ldots \qquad z=x+i\,y\,.$$

Man forme F in eine Summe von Ausdrücken

$$\int_0^{\pi/2} e^{i\,(k'\,t+k''\,z\sin t)}\,d\,t=\int_0^{\pi/2}(\cos t\pm i\sin t)^n\,e^{i\,m\,z\sin t}\,d\,t$$

um. Ersetzt man $i\,m\,z$ durch eine neue Variable, so hat man lediglich

$$f_{\nu,\mu}(z)=\int_0^{\pi/2}\sin^\nu t\cos^\mu t\,e^{z\sin t}\,d\,t \qquad \nu,\mu=0,1,2,\ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

zu betrachten[6]).

Ist in (18) μ gerade, so erhält man durch Ersetzen von $\cos^{2k}$ durch $(1-\sin^2)^k$ die Form $f_{\nu,0}(z)$, von der später zu sprechen sein wird. Ist μ ungerade, so kommt man durch die gleiche Umformung auf $f_{\nu,1}(z)$; in diesem Falle führen einige partielle Integrationen nach t zum Ziel. Somit ist (18) zurückgeführt auf die Behandlung von $f_{\nu,0}(z)$.

Unter Berücksichtigung von

$$\pi\,J_0(i\,z)=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-z\sin t}\,d\,t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

bekommt man

$$\int_0^{\pi/2} e^{z\sin t}\,d\,t=\pi\,J_0(i\,z)-\varphi(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

Vgl. I, Gl. (1) und Fußnote 2.

Hieraus erhält man durch Differentiation

$$\int_0^{\pi/2}\sin t\,e^{z\sin t}\,d\,t=-\pi\,i\,J_1(i\,z)-\frac{d\,\varphi}{d\,z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

und weiter

$$\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\,e^{z\sin t}\,d\,t=\pi\left(J_0(i\,z)+\frac{1}{z}\,i\,J_1(i\,z)\right)-\varphi(z)+\frac{1}{z}\frac{d\,\varphi}{d\,z}+\frac{1}{z} \quad . \quad . \quad . \quad (22).$$

. . . .

Man kann nämlich bei den auf den rechten Seiten der Gleichungen stehenden Funktionen die höheren Ableitungen mit Hilfe ihrer Differentialgleichungen (2) und (5) ausmerzen. Durch fortgesetztes Differenzieren von (20) läßt sich also

$$f_{\nu,0}(z)=\int_0^{\pi/2}\sin^\nu t\,e^{z\sin t}\,d\,t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

und somit auch (17) und (18) für $z=x$ und $z=i\,x$ auf tabellierte Funktionen zurückführen.

Wegen der Periodizität des Sinus könnte auch in (23), bzw. in (17), (18) die obere Grenze des Integrals an Stelle von $\frac{\pi}{2}$ ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ sein, ohne daß sich etwas Wesentliches ändert.

Wir notieren noch die sich durch partielle Integration ergebende Beziehung

$$\int_0^{\pi/2} t\cos t\,e^{-z\sin t}\,d\,t=\frac{1}{z}\left(\varphi(z)-\frac{\pi}{2}\,e^{-z}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

Man beherrscht die Integrale (23) auch für negative ganzzahlige ν. Man bekommt sie durch wiederholtes Integrieren von (20). Auf der rechten Seite der Gleichung entstehen immer tabellierte Funktionen, vorausgesetzt allerdings, daß noch eine Tabelle für

$$\Phi(z)=\int_0^z\varphi(z)\,d\,z$$

[6]) $w=f_{\nu,\mu}(z)$ befriedigt die Differentialgleichung $(z\,w'')'+(\nu+\mu+1)\,w''=(z\,w)'+\nu\,w \qquad \nu,\mu$ seien reell ≥ 0.

gerechnet wird. Mehrfache Quadraturen über $\Phi(z)$ wären ja durch Integration der mit z multiplizierten Gl. (2) auf $\Phi(z)$, $\varphi(z)$, $\frac{d\varphi}{dz}$ zurückführbar, wie schon in II entsprechend an der Besselschen Gl. (6), (7), (8) gezeigt wurde. So gilt beispielsweise

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1-e^{-z\sin t}}{\sin t}\, dt = \Phi(z),$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{z\sin t - \mathfrak{Sin}(z\sin t)}{\sin^2 t}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^z [\Phi(z)+\Phi(-z)]\, dz.$$

Es ist

$$\Phi(z) = F(z)\left\{\frac{\pi}{2} - \int_0^z i\frac{\pi}{2} H_0^{(1)}(i\xi)\, d\xi\right\} + 2\int_0^z F(\xi)\, i\frac{\pi}{2} H_0^{(1)}(i\xi)\, d\xi \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (25)$$

mit

$$F(z) = \int_0^z J_0(i\xi)\, d\xi,$$

$$\Phi(z) - \Phi(-z) = \pi F(z) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26).$$

Aus (26) oder (20) folgt

$$\varphi(z) + \varphi(-z) = \pi J_0(iz) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27),$$

$$\varphi'(z) - \varphi'(-z) = -\pi i J_1(iz) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28).$$

Ferner ist bekanntlich

$$(-1)^\nu \pi J_\nu(z) = \int_0^\pi \cos(z\sin t + \nu t)\, dt \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (29).$$

Setzt man nach (17)

$$F_{0,0,0,1}^{\nu,\nu,\nu,\nu}(z) = \int_0^{\pi/2} \cos(z\sin t + \nu t)\, dt = \psi_\nu(z),$$

so gilt für $\nu = .. -1, 0, 1, ..$

$$\psi_\nu(z) + (-1)^\nu \psi_{-\nu}(z) = (-1)^\nu \pi J_\nu(z) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30).$$

Wir werfen nun einen Blick auf die Struveschen Funktionen $S_\nu(z)$. Sie sind definiert durch die Gleichung

$$J_\nu(z) + i S_\nu(z) = \frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\pi/2} e^{iz\sin t}\cos^{2\nu} t\, dt \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (31).$$

Unter Benutzung von (18) wird

$$J_\nu(z) + i S_\nu(z) = \frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} f_{0,2\nu}(iz) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (32).$$

Die Klasse der Struveschen Funktionen[7]) ist somit jetzt tabellenmäßig erfaßt für $z = x$, $z = ix$ und $2\nu = 0, 1, 2, ..$

Es sind jetzt einige Betrachtungen im Reellen durchzuführen. Aus (18) folgt mit dem Moivreschen Lehrsatz, daß man die Funktion

$$\int_0^{\pi/2} \sin(\nu t)\, e^{x\sin t}\, dt$$

[7]) Näheres über die Struveschen Funktionen findet man z. B. bei Watson, S. 328 ff. — Weyrich: Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen, Teubner, 1937, S. 89. — Über die Bedeutung der Struveschen Funktionen in der Physik, vgl. Watson, S. 417. — Struve: Annalen der Physik und Chemie, 17 (1882), S. 1010 bis 1011. — Mac Lachlan: Bessel Functions for Engineers, Oxford, 1934, S. 65 ff. — Lord Rayleigh: Theory of sound, (1896), Bd. II, S. 163.

für ganzzahlige ν tabellenmäßig beherrscht. Nun bestehen die Gleichungen

$$\int_0^{\pi/2} \cos(a \operatorname{ctg} t) \operatorname{tg}^{2s+1}\left(\frac{t}{2}\right) \frac{dt}{\sin t} = \int_0^{\pi/2} e^{-a \sin t} \sin[(2s+1)t]\, dt \quad \ldots \quad (33),$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2s+1} \int_0^{\pi/2} e^{-a \sin t} \sin[(2s+1)t]\, dt = \frac{\pi}{4} \varphi(a) \quad \ldots \quad (34).$$

Sie sind abgeleitet bei Theisinger, Monatshefte für Mathematik und Physik, 24 (1913), S. 337 bis 341.

Ferner gilt für Integration längs der reellen Achse

$$\int_0^{\infty} \left[\cos\left(\frac{1}{2}\nu\pi\right) J_\nu(ax) + \sin\left(\frac{1}{2}\nu\pi\right) S_\nu(ax)\right] \frac{dx}{x^2+k^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{k} \frac{\left(\frac{ak}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} f_{0,2\nu}(-ak) \quad . \; . \quad (35).$$

Vorauss. $\operatorname{Re}(k) > 0, \quad -\frac{1}{2} < \operatorname{Re}(\nu) < 2, \quad a > 0,$

$$\int_0^{\infty} \frac{J_\nu(ax)}{x^2+k^2} \frac{dx}{x^\nu} = \frac{\sqrt{\pi}}{k} \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} f_{0,2\nu}(-ak) \quad \ldots \quad (36).$$

Vorauss. $a, \operatorname{Re}(k) > 0, \quad \operatorname{Re}(\nu) > -\frac{1}{2},$

$$\int_0^{\infty} \frac{K_\nu(ax)}{x^2+k^2} \frac{dx}{x^\nu} = \frac{\pi^2}{4k^{\nu+1}\cos(\nu\pi)} \cdot \left\{ -Y_\nu(ak) + i \left[J_\nu(ak) - \frac{2\left(\frac{ak}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} f_{0,2\nu}(iak) \right] \right\} \quad (37).$$

Vorauss. $\operatorname{Re}(\nu) < \frac{1}{2}$.

Hierbei ist

$$\frac{\pi}{2} i\, e^{i\nu\pi/2} H_\nu^{(1)}(i\xi) = K_\nu(\xi)$$

gesetzt. Die Gl. (35) bis (37) findet man bei Watson, S. 425 bis 26, abgeleitet. Dort sind noch mehr derartige Integrale angegeben, die auf die Funktionen (18) führen. Dasselbe gilt von folgenden Arbeiten: Meijer, C. S.: Integraldarstellungen für Lommelsche und Struvesche Funktionen. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 38 (1935), S. 628 bis 634, 744 bis 749; Proc. 39 (1936), 519 bis 527. Mac Lachlan and Meyers: Phil. Mag. VII, s. 21 (1936), 425 bis 448.

Schließlich integrieren wir noch die Funktion

$$i\frac{\pi}{2} H_0^{(1)}(i\xi) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-\xi v}}{\sqrt{v^2-1}} dv \qquad \xi, v \text{ reell}, \; \xi > 0 \quad . \; . \quad (38),$$

mit der Substitution $v = \frac{1}{\sin t}$ von 0 bis x und erhalten

$$\int_{\xi=0}^{x} i\frac{\pi}{2} H_0^{(1)}(i\xi)\, d\xi = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{x}{\sin t}} dt, \qquad x \geqq 0 \quad \ldots \quad (39).$$

Wiederholtes Differenzieren bzw. Integrieren[8]) von Gl. (39) nach x ergibt das Integral

$$h_\nu(x) = \int_0^{\pi/2} \sin^\nu t \cdot e^{-\frac{x}{\sin t}} dt, \qquad x > 0 \quad \ldots \quad (40),$$

[8]) Auf dieselbe Art lassen sich aus Gl. (29) weitere Integrale gewinnen, deren Anzahl noch durch Benutzung des Systems (26) bis (28) und (30) vergrößert werden kann.

denn links stehen tabellierte Funktionen. Außerdem zeigt (39), daß

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{\xi=0}^{x} i\, \frac{\pi}{2}\, H_0^{(1)}(i\,\xi)\, d\,\xi = \frac{\pi}{2} \quad \ldots \quad (41)$$

ist. Von dieser Beziehung werden wir später Gebrauch zu machen haben.

V. Die Funktionen $f_{\nu,\mu}(z)$ und $\varphi(z)$ in der komplexen Ebene. Aus der Definitionsgleichung für $f_{\nu,\mu}(z)$ $(\nu, \mu = 0, 1, 2, ..)$ erhält man die Reihenentwicklung dieser ganzen transzendenten Funktion.

$$f_{\nu,\mu}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \int_0^{\pi/2} \sin^{\nu+m} t \cos^{\mu} t\, d\, t \quad \ldots \quad (42).$$

Durch Auswertung[9]) des Integrals in (42) folgt

$$f_{\nu,\mu}(z) = \frac{\pi}{2^{\nu+\mu+1}} \frac{\mu!}{\frac{\mu}{2}!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\nu+m)!}{\frac{\nu+m}{2}!\,\frac{\nu+\mu+m}{2}!} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^m}{m!} \quad \ldots \quad (43).$$

Demnach gilt

$$\varphi(z) = f_{0,0}(-z) = \frac{\pi}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{z}{2}\right)^m}{\left(\frac{m}{2}!\right)^2} \quad \ldots \quad (44)$$

oder

$$\varphi(z) = \frac{\pi}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu}}{(\nu!)^2} - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{2\nu+1}}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2\nu+1)]^2} \quad \ldots \quad (45).$$

Die erste Summe in (45) ist die Reihenentwicklung für die Funktion $\frac{\pi}{2} J_0(i\,z)$. Setzt man

$$\varphi(z) = \frac{\pi}{2} J_0(i\,z) - \sigma(z) \quad \ldots \quad (46),$$

so wird

$$\varphi(-z) = \frac{\pi}{2} J_0(i\,z) + \sigma(z) \quad \ldots \quad (47).$$

(Die Funktion $\sigma(z)$ wird bei Watson mit $i\,\frac{\pi}{2} H_0(-i\,z)$ bezeichnet.) Ferner erhält man aus der Definitionsgleichung für $f_{\nu,\mu}(z)$ die Entwicklung

$$f_{\nu,\mu}(x + i\,y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} f_{\nu+m,\mu}(i\,y) \quad \ldots \quad (48).$$

Setzt man

$$f_{\nu,\mu}(z) = u_{\nu,\mu}(x, y) + i\, v_{\nu,\mu}(x, y)\,,$$

so ergibt Gl. (48) in Verbindung mit der Definitionsgleichung für die Funktion F die Beziehungen

$$u_{\nu,\mu}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} F^{1,1,0,0}_{\nu+m,\mu,0,1}(y) \quad \ldots \quad (49),$$

$$v_{\nu,\mu}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} F^{1,1,0,0}_{\nu+m,\mu,1,0}(y) \quad \ldots \quad (50).$$

[9]) Vgl. z. B. Jahnke-Emde: Funktionentafeln, 2. Auflage, (1933), S. 95.

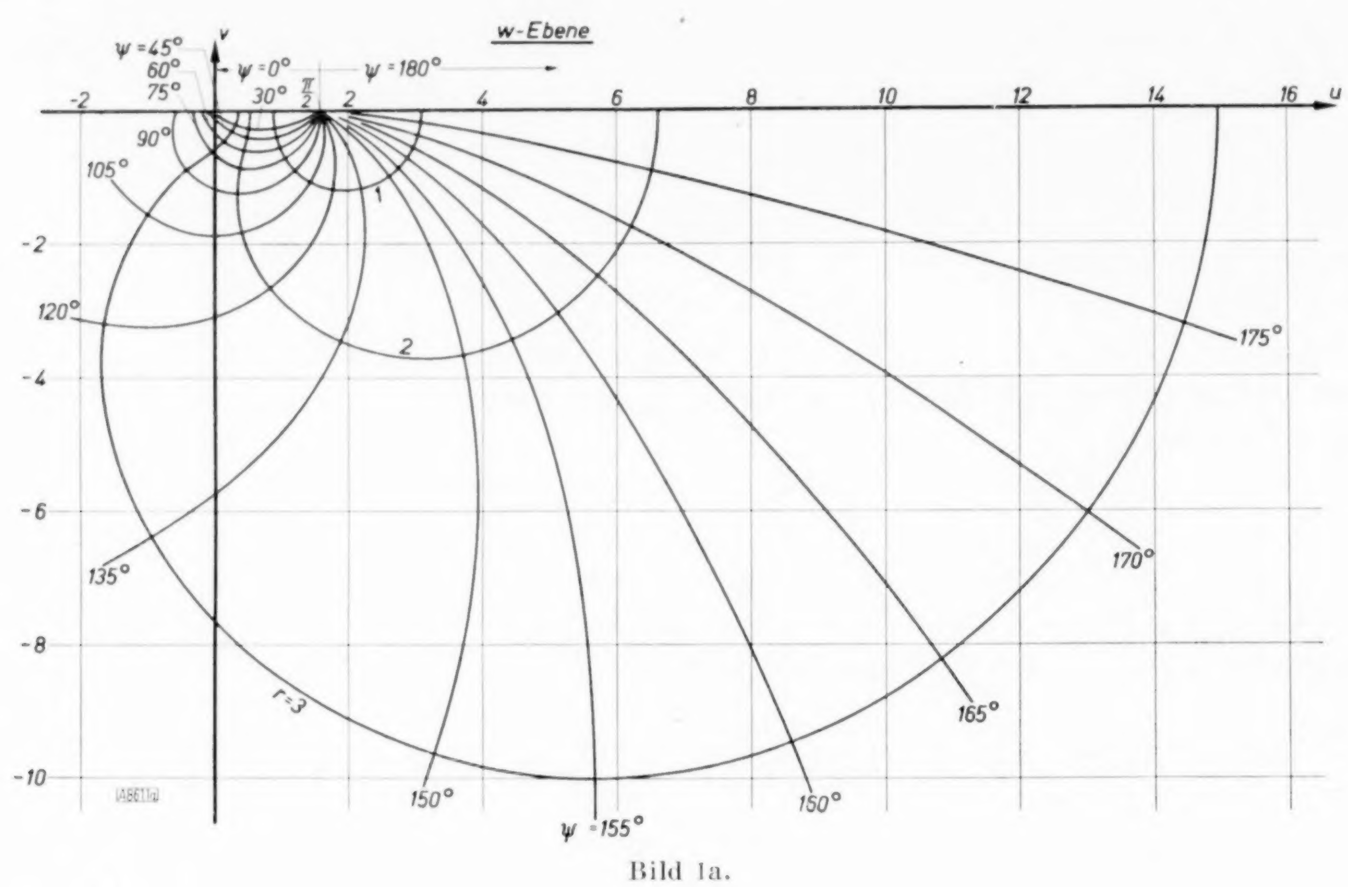


Bild 1a.

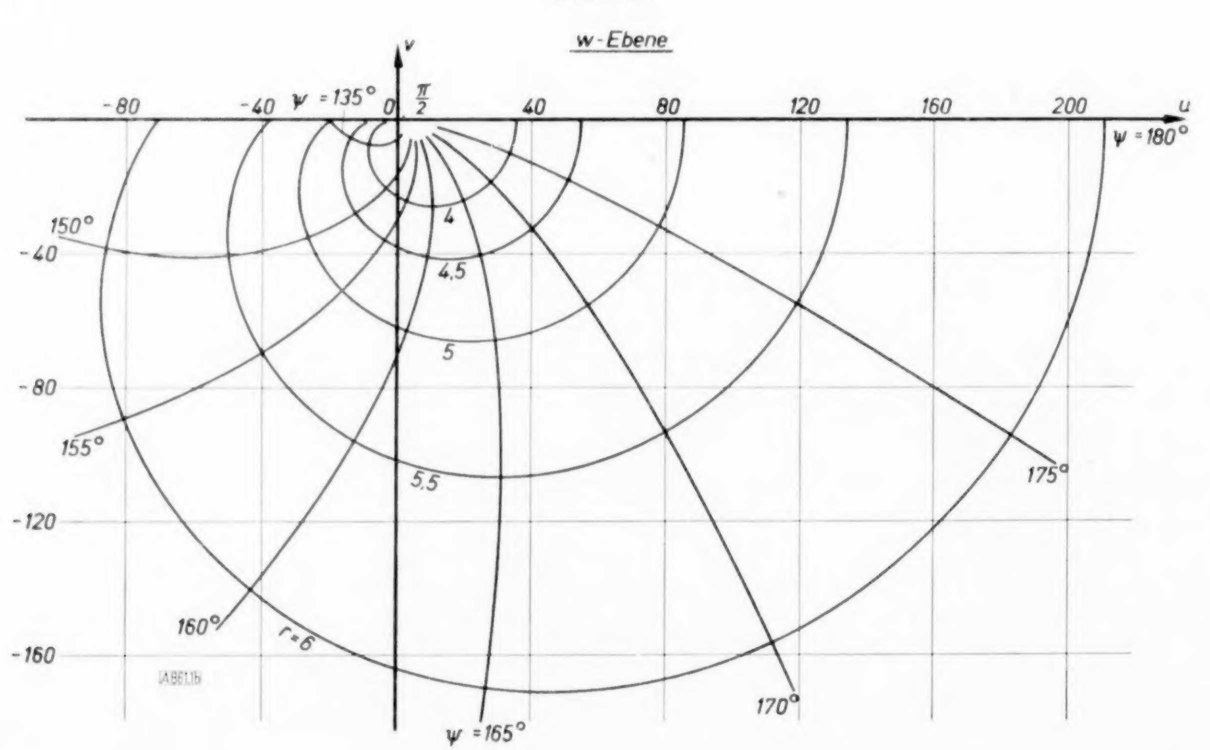


Bild 1b.

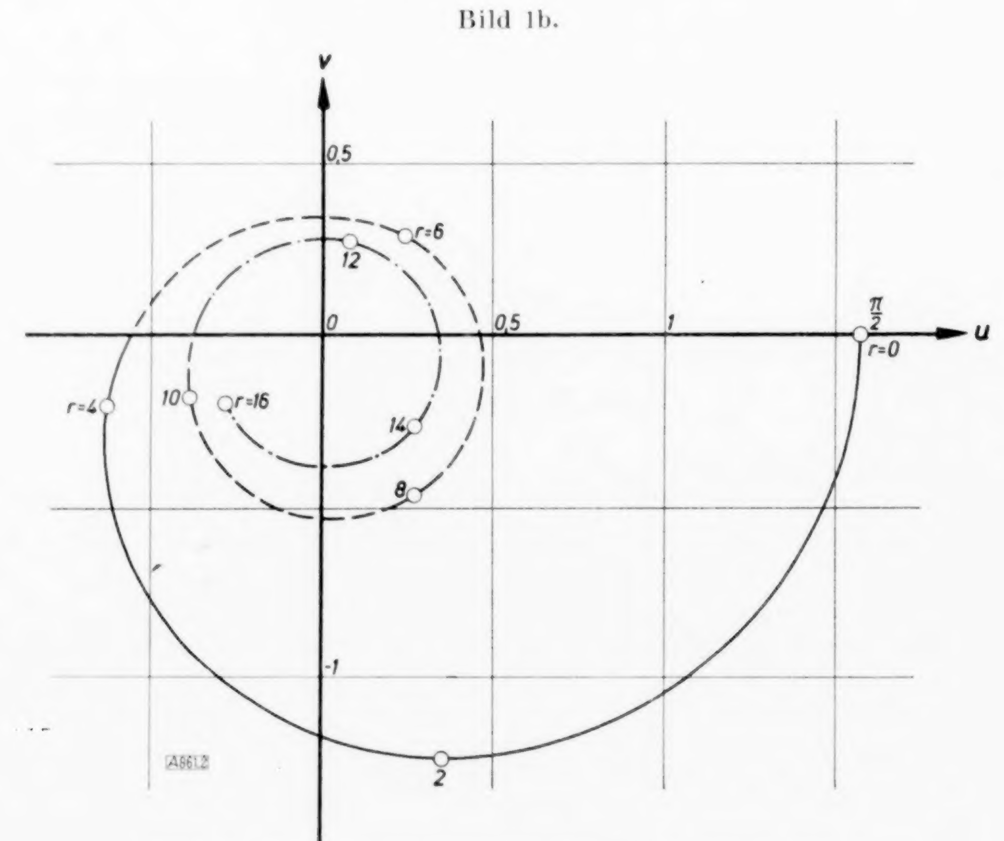


Bild 2. Bild des Halbstrahls $\psi = 90^\circ$ in der w-Ebene

Für die unendlichen Reihen (48), (49), (50) ist die Potenzentwicklung von $\frac{\pi}{2}\,e^x$ eine Majorante. In IV wurde gezeigt, daß die Funktionen f und F unter den Summenzeichen auf den rechten Seiten dieser Gleichungen für reelle und für rein imaginäre Argumente tabellenmäßig zugänglich sind. Aus (48) erhält man noch

$$\varphi(x+i\,y) = f_{0,0}(-x-i\,y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-x)^\nu}{\nu!}\, f_{\nu,0}(-i\,y) \quad \ldots\ldots \quad (51)$$

oder

$$\varphi(x+i\,y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-i\,x)^\nu}{\nu!}\, \frac{d^\nu \varphi(i\,y)}{d\,y^\nu} \quad \ldots\ldots \quad (52).$$

Die Abbildung $w=\varphi(z)$ zeigen die Bilder 1a, 1b ($z=r\,e^{i\psi}$; $w=u+i\,v$). Durch Spiegelung an der reellen Achse entsteht ein volles Exemplar der w-Ebene, die man sich längs der negativen reellen Halbachse aufgeschnitten denken mag.

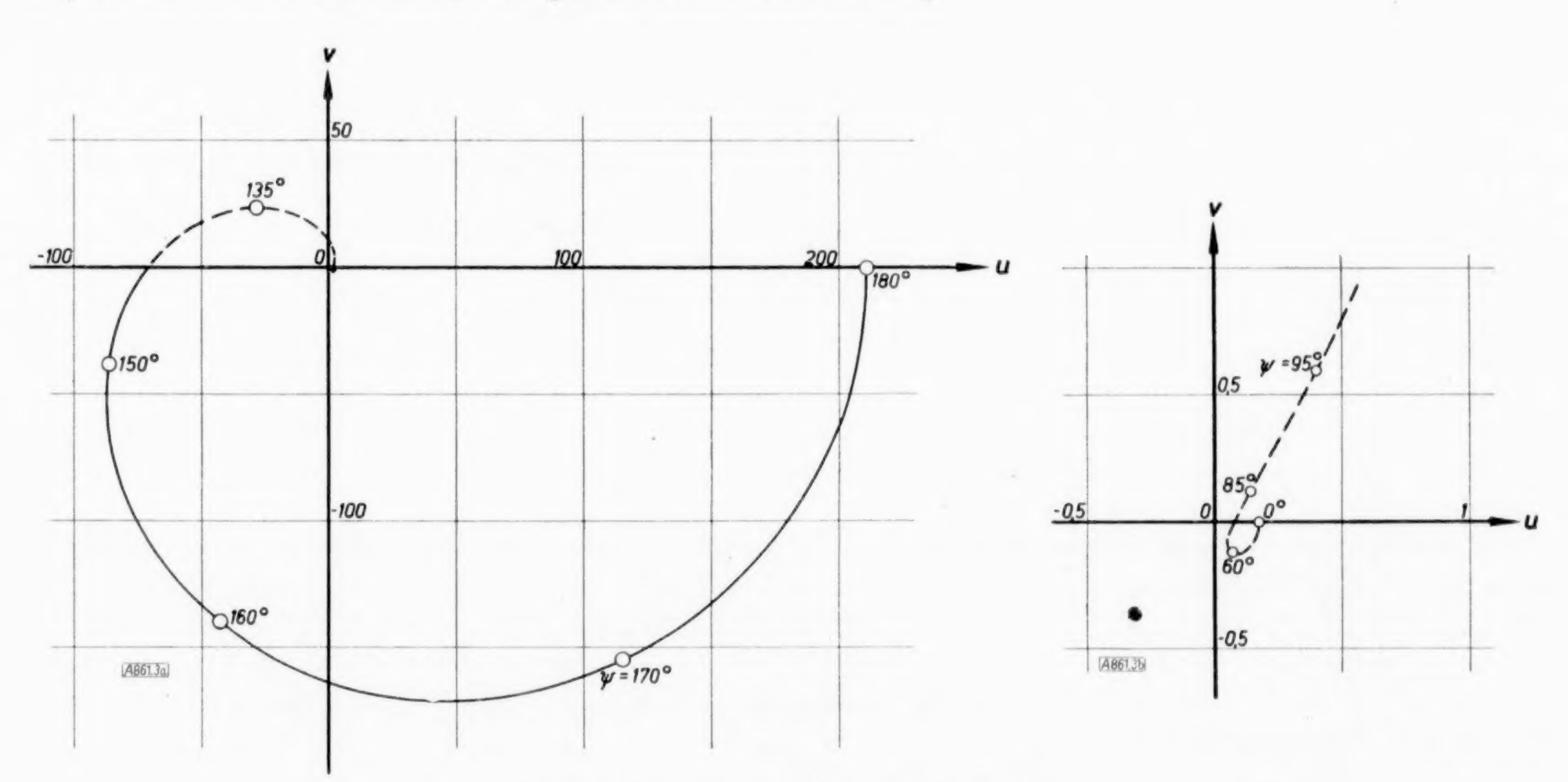


Bild des Kreises $r=6$ in der w-Ebene

Bild 3a. Bild 3b.

Den Halbstrahlen $\psi=\text{const}$ entsprechen Spiralen mit unendlich vielen Windungen. Für $0^\circ < \psi \leqq 90^\circ$ werden die Windungen mit wachsendem r kleiner und kleiner, für $90^\circ < \psi < 180^\circ$ größer und größer. Ein Beispiel gibt Bild 2 (Zahlenwerte aus Watson entnommen). Bilder der Vollgeraden durch $z=0$ sind Spiralen, die sich um 0 und ∞ winden (Ausnahmen: $z=x$, $z=i\,y$).

Die Kreise $r=\text{const}$ verlaufen für kleine Werte von r (etwa für $0<r<4$) nur im 1. Exemplar der w-Ebene. Für $r>4{,}3$ tritt bereits Spiralbildung ein; mit wachsendem r nimmt die Windungszahl der Spiralen mehr und mehr zu, bleibt aber stets endlich. Ein Beispiel zeigt Bild 3a, 3b. (Bei Bild 3a ist der Kurventeil im ersten Quadranten der w-Ebene zwecks besserer Veranschaulichung etwas übertrieben gezeichnet.)

VI. Anwendung der inhomogenen Besselschen Differentialgleichung bei dem Problem der erzwungenen Schwingungen elastischer Körper von zylinderartiger Gestalt. Bekanntlich[10]) löst man mit Besselschen Funktionen die Aufgabe, die freien Schwingungen zylinderartiger Körper zu berechnen. Erwähnt seien Kreismembran, kreisförmige oder kreisringförmige Platte, Zylinder endlicher bzw. unendlicher Länge usw. Für die Behandlung der entsprechenden erzwungenen Schwingungen findet man in der Literatur die Entwicklung der äußeren Kraft $Q(x,y,t)$[11]) sowie der Lösung $V(x,y,t)$ nach den Eigenfunktionen des freien Schwingungsproblems angegeben. Es sei hier ein anderer Weg angedeutet, der in manchen Fällen die Rechenarbeit vermindert.

[10]) Vgl. z. B. Handbuch der Physik von Geiger-Scheel, Bd. VI.

[11]) Wir betrachten hier der Einfachheit halber das zweidimensionale Problem.

Man entwickle Q in eine Reihe

$$Q(x, y, t) = \sum_{(k)} q_k(x, y)\, e^{i \nu_k t}$$

und setze für V an

$$V(x, y, t) = V^*(x, y, t) + \sum_{(k)} v_k(x, y)\, e^{i \nu_k t}.$$

Hierbei sei die Lösung des freien Schwingungsproblems $V^*(x, y, t)$ bereits bekannt. Geht man nun zu Polarkoordinaten (r, φ) über, so ist die Entwicklung

$$q_k(x, y) = \tilde{q}_k(r, \varphi) = \sum_{(\mu)} g_\mu^{(k)}(r)\, e^{i \mu \varphi}$$

durchzuführen, während man für v_k den Ansatz

$$v_k = \sum_{(\mu)} R_\mu^{(k)}(r)\, e^{i \mu \varphi}$$

macht. Die Funktion $R_\mu^{(k)}(r)$ muß der inhomogenen Besselschen Differentialgleichung genügen, wobei, abgesehen von Konstanten, die Funktion $g_\mu^{(k)}(r)$ als Störungsfunktion auftritt. Man approximiere $g_\mu^{(k)}(r)$ durch eine Summe von Potenzen mit ganzzahligen negativen und positiven Exponenten $\sum_{\lambda = -n}^{\lambda = m} a_\lambda r^\lambda$. Die Lösung der inhomogenen Besselschen Gleichung läßt sich dann aus Besselschen Funktionen und Integralen der Form

$$\int_0^r r^\varkappa Z_\nu(r^*)\, d r, \qquad r^* = \frac{r}{i r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

sehr leicht aufbauen[12]). ($\varkappa$ und ν sind ganze Zahlen.) Derartige Integrale konnten in III auf tabellierte Funktionen[13]) zurückgeführt werden.

VII. Einige auf die Besselsche Gleichung zurückführbare Differentialgleichungen. Die allgemeinste durch Punkttransformation in die Besselsche Gleichung überführbare Differentialgleichung 2. Ordnung hat Neumer angegeben[14]). Indessen ist die explizite Auffindung der Transformation sehr schwierig. Daher erscheint es nicht zwecklos, einige auf die Besselsche Gleichung zurückführbare Differentialgleichungen nebst der zugehörigen Transformation anzugeben. Wir betrachten zuerst

$$y'' + y'^2 \varphi(y) + y' f(x) + \psi(y)\, g(x) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54).$$

Die Bedingungen

$$\varphi(y) = \frac{1 - \dfrac{d \psi}{d y}}{\psi(y)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1'),$$

$$g(x) = \left[\pm e^{2 \int e^{-F(x)} d x} - \nu^2\right] e^{-2 F(x)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2'),$$

wobei $F(x) = \int f(x)\, d x$ ist und ν einen Parameter bedeutet, sind hinreichend dafür, daß sich (54) in die Besselsche Gleichung transformieren läßt. Die Substitution ist dann

$$\xi = e^{\int e^{-F(x)} d x}, \qquad \eta = e^{\int \frac{1}{\psi} d y}.$$

Die allgemeine Lösung von (54) ist $e^{\int \frac{1}{\psi} d y} = \begin{matrix} Z_\nu(\xi) \\ Z_\nu(i \xi) \end{matrix}$ für das $\begin{matrix}\text{obere} \\ \text{untere}\end{matrix}$ Vorzeichen in (2'). Beispielsweise hat die Differentialgleichung

$$y'' - \frac{y'^2}{y} + y' (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) + \operatorname{ctg}^2 x\, (\sin^2 x - \nu^2)\, y \ln y = 0$$

die Form (54) und erfüllt die Bedingungen (1'), (2'). Dasselbe gilt von

$$y'' + (\pm e^{2 \lambda x} - \nu^2)\, \lambda^2 y = 0 \qquad \lambda, \nu = \text{const.}$$

[12]) Vgl. z. B. Weyrich: Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen, (1937), S. 87.
[13]) Hinsichtlich negativer $\varkappa$ sind die in III erwähnten Einschränkungen zu beachten.
[14]) Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 173, Heft 3, (1935), S. 131 bis 132, Satz (4), S. 138, Gl. (72) a. a. O.

Ferner sei die Differentialgleichung[15])

$$y'' + y'^2 f_1(y) + y'\left(\frac{1}{x} + F_1(x)\right) + f_2(y)\cdot k\cdot\left(\pm 1 - \frac{\nu^2}{x^2} + F_2(x)\right) = 0 \quad . \; . \; . \quad (55)$$

angeführt. Unter den Voraussetzungen

$$F_2(x) = \frac{1}{2}\left(F_1' + \frac{F_1}{x} + \frac{F_1^2}{2}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3'),$$

$$f_1(y)\, f_2(y) = \frac{1}{k} - \frac{d f_2}{d y} \qquad (k, \nu \text{ Parameter; } k \neq 0) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4')$$

ist die Lösung von (55)

$$e^{\int \frac{dy}{f_2(y)}} = \text{const}\cdot e^{-\frac{k}{2}\int F_1(x)\,dx}\,[Z_\nu(\bar{x})]^k.$$

Für das $\begin{matrix}\text{obere}\\ \text{untere}\end{matrix}$ Vorzeichen in (55) gilt $\bar{x} = \begin{matrix} x \\ i\,x \end{matrix}$.

Es seien jetzt in der homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung

$$w'' + w'\,\varphi_1(z) + w\,\varphi_2(z) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5')$$

φ_1 und φ_2 vorgegebene Funktionen, $\varphi_1 \not\equiv 0$. Setzt man

$$\varphi_1(z) = f_1(z) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6'),$$

$$\varphi_2(z) = f_2(z) + F(\varphi_1, f_2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7'),$$

wobei F noch zu definieren ist, so handelt es sich also um die Differentialgleichung

$$w'' + w' f_1(z) + w\, f_2(z) + w\, F(f_1, f_2) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (56).$$

Für das Funktional

$$F \equiv -\left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2 + \left(\frac{f_2}{f_1}\right)' + e^{-2\int\left(f_1 - 2\frac{f_2}{f_1}\right)dz}\cdot\left[2\,\nu\int e^{-\int\left(f_1 - 2\frac{f_2}{f_1}\right)dz}\,dz\right]^{\frac{1}{\nu}-2} \quad . \; . \; . \; . \quad (57),$$

wobei ν einen Parameter ($\nu \neq 0$) bedeutet, ist die Lösung von (56)

$$w(z) = \zeta_1\,\zeta_2^{\frac{1}{2}}\,Z_\nu\left(\zeta_2^{\frac{1}{2\nu}}\right).$$

Hierbei ist

$$\zeta_1 = e^{-\int\frac{f_2}{f_1}dz}, \qquad \zeta_2 = 2\,\nu\int e^{-\int\left(f_1 - 2\frac{f_2}{f_1}\right)dz}\,dz.$$

Für das Funktional

$$F \equiv -\left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2 + \left(\frac{f_2}{f_1}\right)' + e^{-2\int\left(f_1 - 2\frac{f_2}{f_1}\right)dz}\cdot e^{2\int e^{-\int\left(f_1 - 2\frac{f_2}{f_1}\right)dz}dz} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (58)$$

ist die Lösung von (56)

$$w = \zeta_1\,Z_0(\zeta_2),$$

wobei

$$\zeta_1 = e^{-\int\frac{f_2}{f_1}dz}, \qquad \zeta_2 = e^{\int e^{-\int\left(f_1 - 2\frac{f_2}{f_1}\right)dz}dz}$$

gesetzt ist. Den Übergang von (5′) zu (56) vermitteln die Gl. (6′), (7′). Hierbei ist (7′) bei gegebenen $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ eine Integrodifferentialgleichung für $f_2(z)$, die selbst nach willkürlich gewähltem ν immer lösbar, dabei aber recht kompliziert ist. Wir beschränken uns daher darauf, Gl. (56) nun unter der Annahme zu behandeln, daß f_1 und f_2 vorgegeben sind; der Fall $f_1 \equiv 0$, $f_2 \not\equiv 0$ werde ausgeschlossen. Dabei ist uns bereits bekannt, daß (56) sich mit Besselschen Funktionen integrieren läßt, wenn F mit (57) oder (58) übereinstimmt[16]).

[15]) Der Fall $f_2(y) \equiv y$, $k = 1$, $\bar{x} = x$ findet sich schon bei Jahnke-Emde-Funktionentafeln.

[16]) Vgl. hierzu Lommel: Mathemat. Annalen XIV, 1879, S. 510 bis 536. Lommel arbeitete mit der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\left(\frac{y}{X}\right)}{d\psi^2} - \frac{2\nu - 1}{\psi}\,\frac{d\left(\frac{y}{X}\right)}{d\psi} + \frac{y}{X} = 0,$$

welche die Lösung

$$y(z) = X(z)\,[\psi(z)]^\nu\,Z_\nu(\psi(z))$$

hat. Dabei sind $X(z)$ und $\psi(z)$ beliebige Funktionen. Wir geben hier dem Lommelschen Problem eine neue Fassung.

Für $f_1(z) \equiv 0$, $f_2(z) \equiv f_1(z) \cdot f(z)$ geht (56) über in

$$w'' + w\,F = 0 \quad \text{. . . . . (59).}$$

Aus (57) entsteht dann

$$F \equiv -f^2 + f' + e^{4\int f(z)\,dz}\left[2\,\nu \int e^{2\int f(z)\,dz}\,dz\right]^{\frac{1}{\nu}-2} \quad \text{. . . . . (60).}$$

V o r a u s s. $\nu \neq 0$.

Geht man von einer beliebigen Funktion $f(z)$ aus, so ist durch (60) ein $F(z)$ definiert. Dann gehört dazu eine Differentialgleichung (59), die sich leicht mit Besselfunktionen lösen läßt. Beispielsweise gehen für $f(z) \equiv \dfrac{1}{a-z}$ (59), (60) über in die Gleichung

$$w'' + w\,(a-z)^{-\left(\frac{1}{\nu}+2\right)}A = 0 \quad \text{. . . . . (61)}$$

ν, a, A Konstanten; $\nu \neq 0$.

Für $f_1 \equiv f$, $f_2 \equiv \dfrac{f^2}{2}$ entsteht aus (56), (57)

$$w'' + w' f(z) + w\left\{\frac{f^2}{4} + \frac{f'}{2} + A\,(z+B)^{\frac{1}{\nu}-2}\right\} = 0 \quad \text{. . . . . (62)}$$

$A, B, \nu = \text{const}$; $A, \nu \neq 0$.

Wir zeigen jetzt, daß die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u \cdot \psi\left((x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\right) \quad \text{. . . . . (63)}$$

für jede reguläre Funktion ψ auf die B e s s e l sche Gleichung zurückführbar ist. Mit $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ und dem Ansatz $u = e^{i\nu\varphi}\,y(r)$ erhält man aus (63) die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{d r^2} + \frac{1}{r}\frac{d y}{d r} - \left(\psi(r) + \frac{\nu^2}{r^2}\right) y = 0 \quad \text{. . . . . (64).}$$

Setzt man andererseits in (56), (57) $f_1(z) \equiv \dfrac{1}{z}$, $z \cdot f_2(z) \equiv f(z)$, so findet man, daß sich

$$w'' + \frac{w'}{z} + w\,g(z) = 0 \quad \text{. . . . . (65)}$$

leicht auf die B e s s e l sche Gleichung zurückführen läßt, wenn die Lösung $f(z)$ der Integrodifferentialgleichung

$$g(z) = \frac{f(z)}{z} - f^2 + f' + \frac{1}{z^2}\,e^{4\int f\,dz}\left[2\,\nu \int e^{2\int f\,dz}\,\frac{dz}{z}\right]^{\frac{1}{\nu}-2} \quad \text{. . . . . . . (66)}$$

(ν beliebig[17]) $\neq 0$)

bekannt ist.

Kennt man also eine Funktion $f(z)$, die mit

$$g(z) = -\left(\psi(z) + \frac{\nu^2}{z^2}\right) \quad \text{. . . . . (67)}$$

die Bedingung (66) erfüllt, so ist hiermit die Reduktion von (63) auf die B e s s e l sche Gl. erreicht. Nimmt man f beliebig an, so ist durch (66), (67) eine Funktion ψ definiert, für die uns die Lösung von (63) mit Hilfe von B e s s e l schen Funktionen bekannt ist. Als Beispiel sei angeführt, daß

$$\psi(r) = -\frac{\operatorname{ctg} r}{r} + \operatorname{ctg}^2 r + \frac{1}{\sin^2 r} - C^4\,\frac{\sin^4 r}{r^2} - \frac{1}{4\,r^2} \quad \text{. . . . . (68),}$$

$C = \text{const} \neq 0$

[17]) Für $\nu = 0$ würde an die Stelle der Bedingung (66), die aus (57) gewonnen wurde, eine entsprechende aus (58 abzuleiten sein.

die Bedingung (66), (67) mit $\nu = \frac{1}{2}$; $\int f(r)\, d\, r = \ln \sin r + \ln C$ erfüllt. Der Fall

$$\varphi(r) = a_1 + \frac{a_2}{r} + \frac{a_3}{r^2}$$

ist in dem Buch von Gray und Mathews[18]) angegeben. (64) geht dann in die sogenannte Lommelsche Gleichung über mit der Lösung $y(r) = r^{b_1} Z_n(b_2 r^{b_3})$. Es bedeuten die a_λ vorgegebene, die b_λ geeignet zu bestimmende Konstanten. (Voraussetzg. $a_1 \cdot a_2 = 0$). In der Fußnote[19]) ist Literatur zu VII angegeben.

VIII. Rechnungsgang und Fehlerbestimmung bei den Zahlentafeln. $\varphi(x)$ und $\frac{d\varphi}{d\,x}$ brauchen wegen (27), (28) nur für $x \geqq 0$ berechnet zu werden, wenn man sich auf reelle Argumente beschränken will. Ebenso günstig steht es bei den Integralen der Besselschen Funktionen, denn es ist

$$\int_{\xi=0}^{x} J_0(i\,\xi)\, d\,\xi + \int_{\xi=0}^{-x} J_0(i\,\xi)\, d\,\xi = 0 \qquad (69).$$

Setzt man $i\,\frac{\pi}{2} H_0^{(1)}(i\,x) = K_0(x)$, so folgt aus der Theorie dieser Funktion für $x > 0$ die Beziehung[20])

$$K_0(-x) = K_0(x) - i\,\pi\, J_0(i\,x).$$

Daher gilt für $x \geqq 0$

$$\int_0^{-x} K_0(\xi)\, d\,\xi + \int_0^{x} K_0(\xi)\, d\,\xi = i\,\pi \int_{\xi=0}^{x} J_0(i\,\xi)\, d\,\xi \qquad (70).$$

Alle Tabellen benötigt man also nur für $x \geqq 0$.

Die Integrale der Besselschen Funktionen wurden im wesentlichen nach der Methode der Differenzenrechnung gewonnen. Hierbei wurde die Stirlingsche Formel

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} y(x)\, d\,x = 2\,h \left[y_0 + \frac{\Delta_0^{\,2}}{6} - \frac{\Delta_0^{\,4}}{180} + \frac{\Delta_0^{\,6}}{1512} + \cdots \right] + R_{2n} \qquad (71)$$

benutzt. Die benötigten Funktionswerte wurden den siebenstelligen Tafeln des Watsonschen Werkes entnommen. Die Quadraturen wurden über Teilintervalle von $2\,h = 0{,}1$ bzw. $0{,}2$ berechnet und danach alle Teilintegrale addiert. Fast stets war das Glied der Integrationsformel mit $\Delta_0^{\,6}$, manchmal bereits das mit $\Delta_0^{\,4}$ vernachlässigbar klein. Es wurde zunächst mit der Watsonschen Stellenzahl gerechnet; als Ergebnis der Fehlerabschätzung ergab sich nachher die Notwendigkeit, einige Stellen abzustreichen. Über die Funktion $\int_{\xi=0}^{x} J_0(i\,\xi)\, d\,\xi$ ist nur zu bemerken, daß sie für $x = 6$, 8, 10 und 16 durch Vergleich mit den sich aus der gliedweise integrierten Reihe von $J_0(i\,x)$ ergebenden Werten kontrolliert wurde.

Die Funktion $i\,\frac{\pi}{2} H_0^{(1)}(i\,x)$ hat bei $x = 0$ eine logarithmische Singularität. Hier war also die Differenzenrechnung in der Umgebung von $x = 0$ nicht anwendbar. Für $x = 0{,}1$ bis $x = 0{,}6$ wurde die Reihe

$$i\,\frac{\pi}{2} H_0^{(1)}(i\,x) = J_0(i\,x) \ln \frac{2}{\gamma\, x} + 4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{i^{-2\nu} J_{2\nu}(i\,x)}{2\,\nu} \qquad (72)$$

[18]) Gray and Mathews: A Treatise on Bessel Functions.

[19]) Jahnke-Emde: Funktionentafeln, (1909), S. 166 bis 168, (1933), S. 214 bis 215. — Gray and Mathews: A Treatise on Bessel Functions and their application to physics, (1895), S. 226 bis 240. — Lommel: Studien über die Besselschen Funktionen, (1868), S. 98 bis 120. – Mathemat. Annalen 3, (1871), S. 475 bis 487; 14, (1879), S. 510 bis 536. — Nielsen: Hdbch. der Theorie der Cylinderfunktionen, (1904), S. 129 bis 149. — Watson: Theory of Bessel Functions, S. 95 bis 110. — Weyrich: Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen, (1937), S. 86 bis 88. — Schafheitlin: Besselsche Funktionen, (1908). — Mac Lachlan: Bessel Functions for Engineers, Oxford 1934. – Partielle Differentialgleichungen und Besselsche Funktionen: Kepinski: Mathemat. Annalen 61, (1906), S. 397 bis 405.

[20]) Vgl. z. B. Watson, S. 75, Gl. (5) a. a. O.

nach Potenzen von x entwickelt und danach gliedweise integriert, woraus sich ergibt:

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_{\xi=0}^{x} i\,\frac{\pi}{2}\,H_0^{(1)}(i\,\xi)\,d\,\xi &= x\,(1+\ln x')+\frac{x^3}{12}\left(\frac{4}{3}+\ln x'\right)+\frac{x^5}{320}\left(\frac{17}{10}+\ln x'\right)\\ &\quad+\frac{x^7}{16128}\left(\frac{83}{42}+\ln x'\right)+\cdots\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(73).$$

Hierbei ist $x'=\dfrac{2}{\gamma\,x}$.

Im Intervall $x=0{,}6$ bis 16 wurde wieder nach der Stirlingschen Formel (71) gerechnet. Man erhält so die Teilintegrale über die Intervalle $2h$ recht genau; indessen kann sich bei der Addition der einzelnen Teilergebnisse natürlich der Fehler summieren. Deshalb wurde das Integral

$$\int\limits_{\xi=0}^{x} i\,\frac{\pi}{2}\,H_0^{(1)}(i\,\xi)\,d\,\xi\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(74)$$

für $x=10$ u. $x=16$ noch auf anderem Wege berechnet. So ergaben sich in der Reihe der Summation der Teilergebnisse zwei feste Kontrollwerte. Nach Gl. (39) ist nämlich

$$\frac{\pi}{2}-\int\limits_{\xi=0}^{x} i\,\frac{\pi}{2}\,H_0^{(1)}(i\,\xi)\,d\,\xi=\int\limits_{0}^{\pi/2} e^{-\frac{x}{\cos\xi}}\,d\,\xi\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(75).$$

Dieser Ausdruck ist für große Werte von x zur Berechnung geeignet.

$$\int\limits_{0}^{\pi/2} e^{-\frac{x}{\cos\xi}}\,d\,\xi=\int\limits_{0}^{\varepsilon}+\int\limits_{\varepsilon}^{\pi/2}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(76).$$

Für kleine ε und große x gilt näherungsweise

$$\int\limits_{0}^{\varepsilon} e^{-\frac{x}{\cos\xi}}\,d\,\xi=\int\limits_{0}^{\varepsilon} e^{-\frac{x}{1-\frac{\xi^2}{2}+\cdots}}\,d\,\xi=\int\limits_{0}^{\varepsilon} e^{-x\left(1+\frac{\xi^2}{2}\right)}\,d\,\xi,$$

$$\int\limits_{0}^{\varepsilon} e^{-\frac{x}{\cos\xi}}\,d\,\xi=e^{-x}\sqrt{\frac{\pi}{2\,x}}\;\Phi\!\left(\varepsilon\sqrt{\frac{x}{2}}\right)\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(77).$$

Hierbei bedeutet Φ das Gaussche Fehlerintegral.

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\pi/2} e^{-\frac{x}{\cos\xi}}\,d\,\xi=\int\limits_{\frac{1}{\cos\varepsilon}}^{\infty}\frac{e^{-x\,u}}{u\sqrt{u^2-1}}\,d\,u\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(78).$$

Für große x ist es möglich, ein ε zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ so zu wählen, daß (77) noch gilt und (78) schon vernachlässigbar klein wird. Als brauchbarer Wert ergab sich bei $x=16$

$$\varepsilon=\arccos\frac{10}{13}.$$

Auf diese Weise wurde (75) für $x=16$ berechnet. Da (75) für $x=16$ schon sehr klein ist, bedeutet selbst eine Fehlermöglichkeit von etwa 4% dennoch einen sehr genauen Wert für (74). Der Fehler fällt in Dezimalstellen, die später unterdrückt wurden. Das Intervall $x=10$ bis $x=16$ wurde nun durch fortgesetzte Subtraktion der Teilintegrale von dem so berechneten Wert

erhalten. Bei $x = 10$ entstand die Möglichkeit einer Kontrolle durch Vergleich mit demjenigen Wert, der durch Addition der Teilintegrale der von 0,6 aufsteigenden Reihe enstanden war. Der Unterschied der beiden Werte fiel außerhalb der als geltend vermuteten Stellenzahl. Der Wert für $x = 10$ wurde noch auf andere Weise kontrolliert, wie gleich erläutert wird.

Die Funktionen $\varphi(x)$ und $\frac{d\varphi}{dx}$ sind nach (3) und (4) berechnet. Wegen (41) führte das Auftreten der Funktion (75) in diesen Gleichungen dazu, daß die geltende Stellenzahl bei $\varphi(x)$ und $\frac{d\varphi}{dx}$ kleiner und kleiner wurde. Zur Kontrolle wurde $\varphi(x)$ für $x = 10$ nach Gl. (1) durch graphische Auswertung des Integrals mit dem Integraphen ermittelt. Es ergab sich, daß für $x = 10$ sogar noch die in der Zahlentafel als unsicher angegebene dritte Stelle richtig ist. Ferner war dieses Ergebnis auch eine Stützung für die Richtigkeit der übrigen zur Rechnung benutzten Funktionswerte an der Stelle $x = 10$.

An Hand der Tafel für $\varphi(x)$ wurde sodann $\frac{d\varphi}{dx}$ interpoliert mittels

$$h\,y'(x_0) = \frac{\Delta y_0 + \Delta y_{-1}}{2} - 0{,}1666\,\frac{\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}}{2} \quad \text{. . . . . (79).}$$

Beträgt die Unsicherheit in der letzten angegebenen[21]) Stelle bei den y-Werten eine Einheit, so kann sie durch die Interpolation bei $h\,y'$ auf vier Einheiten anwachsen. Der Vergleich mit der Tafel für $\frac{d\varphi}{dx}$ ergab einen Fehler, der nie mehr als drei Einheiten betrug[22]).

Die Fehlerabschätzung wurde bei den Besselintegralen in der Weise durchgeführt, daß der Fehler $\varepsilon_{\Delta J}$ jeder Teilintegration nach (71) bestimmt und angenommen wurde, daß sich alle Fehler im gleichen Sinne addieren, was sicher nicht der Fall ist. Bedeutet $10^{-\nu}$ die aus den Watsonschen Tafeln zu erhaltende Genauigkeit, so wurde für $\varepsilon_{\Delta J}$ angesetzt:

$$\varepsilon_{\Delta J} = 2\,h\,10^{-\nu}\left[1 + \frac{4}{6} + \frac{16}{180} + \cdots + \frac{1}{2}\right] + R \quad \text{. . . . . (80).}$$

Für R wurde der maximale Wert des ersten vernachlässigten Gliedes der Stirlingschen Formel in dem betrachteten Intervall eingesetzt. Es ergab sich stets

$$\varepsilon_{\Delta J} < 5\,h\,10^{-\nu} \qquad 2\,h = \begin{matrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \end{matrix} \quad \text{. . . . . (81).}$$

Wesentlich für den Verlauf der Fehlerabschätzung war, daß sich ν im Intervall $x = 0$ bis 16 erheblich ändert.

Nachdem die Funktionswerte entsprechend der Fehlerrechnung abgerundet waren, wurden sie durch Bildung der Differenzenstaffel kontrolliert.

Für die Besselintegrale beträgt die Fehlerschranke eine, für $\varphi(x)$, $\frac{d\varphi}{dx}$ im Intervall $x = 0$ bis 6 eine halbe, zwischen $x = 6$ und 8 eine Einheit der letzten angegebenen Stelle. Im Intervall 8 bis 16 ist bei φ und $\frac{d\varphi}{dx}$ die letzte Stelle mit noch etwas größerer Unsicherheit behaftet und daher klein gedruckt. Eine überstrichene $\bar{5}$ ist durch Erhöhung beim Abrunden entstanden und bleibt bei weiterer Abrundung fort.

Für die Interpolation benutze man bei Vernachlässigung der dritten bzw. vierten Differenzen die Formeln von Bessel bzw. Laplace-Everett; man benötigt dann nur die zweiten Differenzen.

[21]) Die klein gedruckten Zahlen in Tafel 3 gelten nur dann als „angegeben", wenn weitere Ziffern nicht vorhanden sind. $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right.$ für $\left.x = 15-16.\right)$

[22]) Allerdings war es im Intervall $x = 6{,}2$ bis $x = 8$ nicht möglich, durch Interpolation $\frac{d\varphi}{dx}$ genau genug zu erhalten, was nach dem Verlauf der Differenzen auch verständlich ist.

Zahlentafel 1

x	$\int_{\xi=0}^{x} J_0(i\cdot\xi)\,d\xi$	Δ^2	x	$\int_{\xi=0}^{x} J_0(i\cdot\xi)\,d\xi$	Δ^2
0,0	0		5,2	37,8146	1,1736
0,1	0,100083	0,000502	5,4	44,9541	1,4114
0,2	0,200668	0,001005	5,6	53,50495	1,6979
0,3	0,302258	0,001517	5,8	63,7538	2,0438
0,4	0,405365	0,002043	6,0	76,0464	2,4609
0,5	0,510515	0,002580	6,2	90,7999	2,9640
0,6	0,618245	0,003139	6,4	108,5174	3,5715
0,7	0,729114	0,003721	6,6	129,8064	4,305
0,8	0,843704	0,004331	6,8	155,400	5,190
0,9	0,962625	0,004975	7,0	186,184	6,261
1,0	1,086521	0,00565	7,2	223,229	7,551
1,1	1,21607	0,00638	7,4	267,825	9,115
1,2	1,35200	0,00715	7,6	321,536	11,001
1,3	1,49508	0,00798	7,8	386,248	13,284
1,4	1,64614	0,00887	8,0	464,244	16,042
1,5	1,80607	0,00982	8,2	558,282	19,371
1,6	1,97582	0,01085	8,4	671,701	23,416
1,7	2,15642	0,01198	8,6	808,536	28,300
1,8	2,34900	0,01317	8,8	973,671	34,210
1,9	2,55475	0,01450	9,0	1173,016	41,355
2,0	2,77500	0,01592	9,2	1413,72	50,03
2,1	3,01117	0,01746	9,4	1704,45	60,49
2,2	3,26480	0,01915	9,6	2055,67	73,19
2,3	3,53758	0,02100	9,8	2480,08	88,55
2,4	3,83136	0,02299	10,0	2993,045	107,18
2,5	4,14813	0,02519	10,2	3613,175	129,70
2,6	4,49009	0,02757	10,4	4363,02	157,02
2,7	4,85962	0,03018	10,6	5269,88	190,11
2,8	5,25933	0,03303	10,8	6366,85	230,22
2,9	5,69207	0,03615	11,0	7694,04	278,80
3,0	6,16096	0,03956	11,2	9300,03	337,7
3,1	6,66941$\overline{5}$	0,04330	11,4	11243,7	409,2
3,2	7,22116	0,04737	11,6	13596,6	495,6
3,3	7,82028	0,05184	11,8	16445,1	600,6
3,4	8,47124	0,05675	12,0	19894,2	727,9
3,5	9,17895	0,06209	12,2	24071,2	882,3
3,6	9,94875	0,06798	12,4	29130,5	1069,4
3,7	10,78653	0,07441	12,6	35259,2	1296,4
3,8	11,69872	0,08146	12,8	42684,3	1572,0
3,9	12,69237	0,08919	13,0	51681,4	1906,0
4,0	13,77521	0,09766	13,2	62584,5	2311,4
4,1	14 95571	0,10695	13,4	75799,0	2803,3
4,2	16,24316	0,11714	13,6	91816,8	3400
4,3	17,64775$\overline{5}$	0,12832	13,8	111235	4125
4,4	19,180655	0,14055	14,0	134778	5003
4,5	20,85412	0,15400	14,2	163324	6072
4,6	22,68158	0,1687	14,4	197942	7366
4,7	24,6778	0,1849	14,6	239926	8939
4,8	26,8589	0,2027	14,8	290849	10849
4,9	29,2427	0,2222	15,0	352621	13165
5,0	31,8487	0,2435	15,2	427558	15981
5,1	34,69815	0,2669	15,4	518476	19399
			15,6	628793	23548
			15,8	762658	28590
			16,0	925113	

Zahlentafel 2

x	$\int\limits_{\xi=0}^{x} i\,\frac{\pi}{2}\,H_0^{(1)}(i\,\xi)\,d\,\xi$	$\varDelta^2$
0,00	0	
0,02	0,100563	
0,04	0,173417	
0,1	0,342165	
0,2	0,547116	— 0,050103
0,3	0,701964	— 0,031219
0,4	0,825593	— 0,022119
0,5	0,927103	— 0,016707
0,6	1,011906	— 0,013111
0,7	1,083598	— 0,010556
0,8	1,144734	— 0,008653
0,9	1,197217	— 0,007190
1,0	1,242510	— 0,006039
1,1	1,281764	— 0,005111
1,2	1,315907	— 0,004357
1,3	1,345693	— 0,003734
1,4	1,371745	— 0,003215
1,5	1,394582	— 0,002780
1,6	1,414639	— 0,002411
1,7	1,432285	— 0,002096
1,8	1,447835	— 0,001831
1,9	1,461554	— 0,001598
2,0	1,473675	— 0,001406
2,1	1,48439	— 0,00122
2,2	1,49389	— 0,00110
2,3	1,50229	— 0,00094
2,4	1,50975	— 0,00084
2,5	1,51637	— 0,00074
2,6	1,52225	— 0,00262
2,8	1,53213	— 0, 206
3,0	1,53995	— 0, 162
3,2	1,54615	— 0, 126
3,4	1,55109	— 0, 102
3,6	1,55501$\bar{5}$	— 0,00078
3,8	1,55815	— 0, 64
4,0	1,56065	— 0, 50
4,2	1,56265	— 0, 40
4,4	1,56425	— 0, 32
4,6	1,56553	— 0, 25
4,8	1,56656	— 0, 20
5,0	1,56739	— 0, 17
5,2	1,56805	— 0, 13
5,4	1,56858	— 0, 10
5,6	1,56901	— 0,00008
5,8	1,56936	
6,0	1,56963	
6,2	1,56986	
6,4	1,57004	
6,6	1,570184	
6,8	301	
7,0	396	
7,2	472	
7,4	534	
7,6	584	
7,8	624	
8,0	657	
8,2	683	
8,4	705	
8,6	722	
8,8	736	
9,0	747	
9,2	757	
9,4	764	
9,6	770	
9,8	775	
10,0	1,570779	
10,2	1,5707825	
10,4	85	
10,6	87	
10,8	89	
11,0	90	
11,2	91$\bar{5}$	
11,4	924	
11,6	1,5707931	
11,8	37	
12,0	42	
12,2	46	
12,4	49	
12,6	52	
12,8	54	
13,0	56	
13,2	57	
13,4	58	
13,6	1,5707959	
14,0	1,57079606	
14,4	61$\bar{5}$	
14,8	621	
15,2	625	
15,6	627	
16,0	1,57079629	

$$\lim_{x\to\infty}\int\limits_{\xi=0}^{x} i\,\frac{\pi}{2}\,H_0^{(1)}(i\,\xi)\,d\,\xi=\frac{\pi}{2}=1{,}570796327$$

Zahlentafel 3

$\varphi(x)$	x	$-\frac{d\varphi}{dx}$	$\varphi(x)$	x	$-\frac{d\varphi}{dx}$
$\frac{\pi}{2} = 1{,}5708$	0,0	1,0000	0,147	7,0	0,0221
1,4746	0,1	0,9247	0,142	7,2	0,0208
1,3856	0,2	0,8555	0,138	7,4	0,0195
1,3033	0,3	0,7919	0,1346	7,6	0,0185
1,2271	0,4	0,7334	0,131	7,8	0,0174
1,1565	0,5	0,6796	0,128	8,0	0,0165
1,0910	0,6	0,6301	$0{,}124_4$	8,2	$0{,}015_6$
1,0303	0,7	0,5846	$0{,}12_1$	8,4	$0{,}014_8$
0,9740	0,8	0,5427	$0{,}11_9$	8,6	$0{,}014_1$
0,9217	0,9	0,5040	$0{,}11_6$	8,8	$0{,}013_4$
			$0{,}11_3$	9,0	$0{,}012_8$
0,8731	1,0	0,4685	$0{,}11_1$	9,2	$0{,}012_2$
0,7859	1,2	0,4054	$0{,}10_8$	9,4	$0{,}011_7$
0,7103	1,4	0,3518	$0{,}10_6$	9,6	$0{,}011_2$
0,6446	1,6	0,3060	$0{,}10_4$	9,8	$0{,}010_8$
0,5874	1,8	0,2670	$0{,}10_1$	10,0	$0{,}010_4$
0,5375	2,0	0,2336	$0{,}099_1$	10,2	$0{,}0099_7$
0,4937	2,2	0,2050	$0{,}097_1$	10,4	$0{,}0095_7$
0,4552	2,4	0,1805	$0{,}095_3$	10,6	$0{,}0092_0$
0,4212	2,6	0,1594	$0{,}093_4$	10,8	$0{,}0088_6$
0,3912	2,8	0,1412	$0{,}091_7$	11,0	$0{,}0085_3$
0,3646	3,0	0,1254	$0{,}090_0$	11,2	$0{,}0082_2$
0,3409	3,2	0,1118	$0{,}088_4$	11,4	$0{,}0079_2$
0,3197	3,4	0,1000	$0{,}086_9$	11,6	$0{,}0076_5$
0,3008	3,6	0,0897	$0{,}085_4$	11,8	$0{,}0073_9$
0,2838	3,8	0,0808	$0{,}083_9$	12,0	$0{,}0071_5$
0,2684	4,0	0,0729	$0{,}082_5$	12,2	$0{,}0069_1$
0,2545	4,2	0,0661	$0{,}081_2$	12,4	$0{,}0067_0$
0,2419	4,4	0,0600	$0{,}079_8$	12,6	$0{,}0064_9$
0,2305	4,6	0,0547	$0{,}078_6$	12,8	$0{,}006_3$
0,2200	4,8	0,0500	$0{,}077_4$	13,0	$0{,}006_1$
0,2104	5,0	0,0459	$0{,}076_3$	13,2	$0{,}005_8$
0,2016	5,2	0,0421	$0{,}075_2$	13,4	$0{,}005_6$
0,1936	5,4	0,0389	$0{,}074_1$	13,6	$0{,}005_4$
0,1861	5,6	0,0359			
0,1792	5,8	0,0333	$0{,}072_0$	14,0	$0{,}005_0$
0,1727	6,0	0,0309	$0{,}070_0$	14,4	$0{,}004_7$
0,1668	6,2	0,0288	$0{,}068_1$	14,8	$0{,}004_4$
0,161	6,4	0,0268	$0{,}06_7$	15,2	$0{,}00_4$
0,156	6,6	0,0250	$0{,}06_5$	15,6	$0{,}00_3$
0,151	6,8	0,0235	$0{,}06_3$	16,0	$0{,}00_3$

KLEINE MITTEILUNGEN

Allgemeines über Leitkurven in Richtungsfeldern. Als Hilfsmittel für die graphische Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung $y' = f(x, y)$ kann man bekanntlich in geeigneten Fällen sogenannte Strahlkurven verwenden. Unter bestimmten Umständen arten diese in Strahlpunkte aus und führen dann zu dem Begriff der Leitkurve. Wir knüpfen im folgenden an die Darstellung an, die Willers in seinem Buche über „Methoden der praktischen Analysis" (Berlin 1928, S. 299 ff.) diesem Gegenstand gegeben hat. Für eine beliebige Ausgangskurve $\varphi(x, y) = c$ erhält er die Gleichung der zugehörigen Strahlkurve durch Elimination von x und y aus

$$\left.\begin{aligned} \xi(x, y) &= x + \frac{f\varphi_y + \varphi_x}{f_x\varphi_y - f_y\varphi_x} \\ \eta(x, y) &= y + f\cdot\frac{f\varphi_y + \varphi_x}{f_x\varphi_y - f_y\varphi_x} \\ \varphi(x, y) &= c \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Man sieht, daß bei Gültigkeit von (1) die Identität

$$\frac{y - \eta(x, y)}{x - \xi(x, y)} = f(x, y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

besteht, die im übrigen die charakteristische Eigenschaft der Strahlkurve unmittelbar zum Ausdruck bringt. Willers weist dann darauf hin, daß sich die Strahlkurve auf einen Strahlpunkt zusammenzieht, falls die Differentialgleichung die Form

$$y' = \frac{y - g(\varphi(x, y))}{x - h(\varphi(x, y))} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

hat, d. h. falls

$$\xi = h(u), \quad \eta = g(u) \quad \text{mit} \quad u = \varphi(x, y) \quad . \quad . \quad (3{,}1)$$

ist. Wir bemerken zunächst, daß die Eigenschaft, daß die zugehörige Strahlkurve sich auf einen Strahlpunkt zusammenzieht, nicht nur der einen ausgewählten Kurve zukommt, sondern auch jeder anderen Kurve der Schar $\varphi(x, y) = \text{const}$. Denn ξ und η hängen in (1) nicht von φ unmittelbar, sondern nur von $\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$ ab; das ist aber für alle Kurven der Schar $\varphi(x, y) = \text{const}$ dasselbe. Auf diese Weise erhalten wir für jeden Wert des Parameters u einerseits eine Kurve $\mathfrak{K}_u$ der Schar $\varphi(x, y) = \text{const}$, andererseits einen Punkt $\Pi(\xi, \eta) = \Pi(\xi(u), \eta(u)) = \Pi_u$. Die Punkte Π_u erfüllen eine Kurve $\mathfrak{L}$, nämlich die durch die Parameterdarstellung (3,1) gegebene. Jeder Punkt Π_u ist Ausstrahlungspunkt für die Linienelemente in allen den Punkten P_u des Richtungsfeldes, die auf der betreffenden Kurve $\mathfrak{K}_u$ liegen; er ist damit auch Ausstrahlungspunkt für die Tangenten an die Integralkurven in diesen Punkten P_u. Im Anschluß an eine frühere eigene Arbeit („Ein abbildungsgeometrisches Verfahren zur Darstellung von Richtungsfeldern . . ." in „Deutsche Mathematik" 1938, S. 353ff.) und eine dort angegebene Veröffentlichung von Alferov nennen wir $\mathfrak{L}$ in sinngemäßer Verallgemeinerung des bei linearen Differentialgleichungen erster Ordnung bekannten gleichnamigen Begriffes eine Leitkurve des Richtungsfeldes, die Kurven $\mathfrak{K}_u$ die zugehörigen Isopunktalen und die Geraden $P_u\Pi_u$ die Leitstrahlen.

Die in (3) und (3,1) angeführten Bedingungen für die Ausartung der Strahlkurven in Strahlpunkte sind völlig gleichbedeutend mit der einen von Alferov angegebenen, daß für die Existenz einer Leitkurve das identische Verschwinden der Funktionaldeterminante $\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}$ notwendig und hinreichend ist. Aus dieser Formulierung aber scheint ebenso wie aus der Bemerkung von Willers, daß man „Typen von Differentialgleichungen aufstellen kann, für die die Zusammenfassung der Richtungen auf bestimmten Kurven Strahlpunkte ergibt", hervorzugehen, daß bisher die Gültigkeit des folgenden Satzes nicht bemerkt worden ist.

Im Richtungsfeld jeder Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ läßt sich jede beliebige Kurve als Leitkurve wählen und die zugehörige Isopunktalenschar unmittelbar angeben.

Der Beweis dieser Tatsache ist denkbar einfach. Sei

$$\xi = h(u), \quad \eta = g(u) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

eine Parameterdarstellung der willkürlich als Leitkurve gewählten Kurve, dann muß nach (2) die Identität

$$\frac{y - g(u)}{x - h(u)} = f(x, y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

bestehen. Das ist aber dann und nur dann der Fall, wenn wir

$$g(u) = y - (x - h(u))\, f(x, y) \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

setzen. Damit haben wir jedoch bereits die Schargleichung der Isopunktalen mit u als Parameter gewonnen. Man erkennt das entweder unmittelbar oder folgendermaßen: Sei $u = \varphi(x, y)$ die Auflösung von (6) nach u, so lautet die Differentialgleichung der Schar (6) einerseits

$$y' = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7{,}1),$$

andererseits erhalten wir sie aus (6) durch totale Differentiation nach x (bei festem u). Das liefert zunächst

$$0 = y' - (x - h(u))\,(f_x + f_y\cdot y') - f \quad . \quad . \quad (7{,}2)$$

und nach Auflösung nach $h(u)$ und Einsetzen in (6) die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} h(u) &= x + \frac{f - y'}{f_x + f_y\cdot y'} \\ g(u) &= y + f\cdot\frac{f - y'}{f_x + f_y\cdot y'} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7{,}3),$$

die zusammen die Differentialgleichung der Schar (6) darstellen. (7,1) und (7,3) ergeben vereint

$$\left.\begin{aligned} h(u) &= x + \frac{f\varphi_y + \varphi_x}{f_x\varphi_y - f_y\varphi_x} \\ g(u) &= y + f\cdot\frac{f\varphi_y + \varphi_x}{f_x\varphi_y - f_y\varphi_x} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen stimmen mit denen von (1) überein, der Zusammenhang zwischen den linken Seiten wird durch (4) vermittelt. Das heißt aber: da wegen (4) $\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = 0$ ohne weiteres erfüllt ist, arten die Strahlkurven der Kurven-

schar (6) in Strahlpunkte aus; (6) stellt also in der Tat die Isopunktalenschar zu der durch (4) willkürlich vorgegebenen Leitkurve dar.

Die damit bewiesene Tatsache, daß es im Richtungsfeld jeder Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ Leitkurven gibt, wird für die Praxis der graphischen Integration immer dann Bedeutung haben, wenn die Isopunktalen einfach genug zu zeichnen sind. Man wird sogar sagen können, daß das Leitkurvenverfahren infolge seiner besonderen Eigenschaften auch dann den Vorzug gegenüber dem Isoklinenverfahren verdienen wird, wenn die Schar der Isopunktalen nicht wesentlich schwerer herzustellen ist als die der Isoklinen.

Zur weiteren Orientierung im Richtungsfeld kann dann noch der folgende Satz dienen:

Berührt der Leitstrahl $P_u H_u$ die zugehörige Isopunktale $\mathfrak{K}_u$, so liegt der Berührungspunkt P_u auf der Wendepunktskurve der Integralkurven, d. h. er ist selbst Wendepunkt der durch ihn hindurchgehenden Integralkurve.

Im Berührungspunkt muß nämlich die Richtung der Isopunktale mit der Richtung des Leitstrahles übereinstimmen. Wir müssen also in (7.2) $y' = f$ setzen. Das führt zu der Beziehung

$$(x - h(u))(f_x + f f_y) = 0 .$$

Schließen wir die Stellen aus, in denen $x - h(u) = 0$ und infolgedessen wegen (5) $f(x, y)$ nicht mehr beschränkt ist, so erhalten wir

$$f_x + f f_y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Das ist aber gerade die Gleichung der Wendepunktskurve.

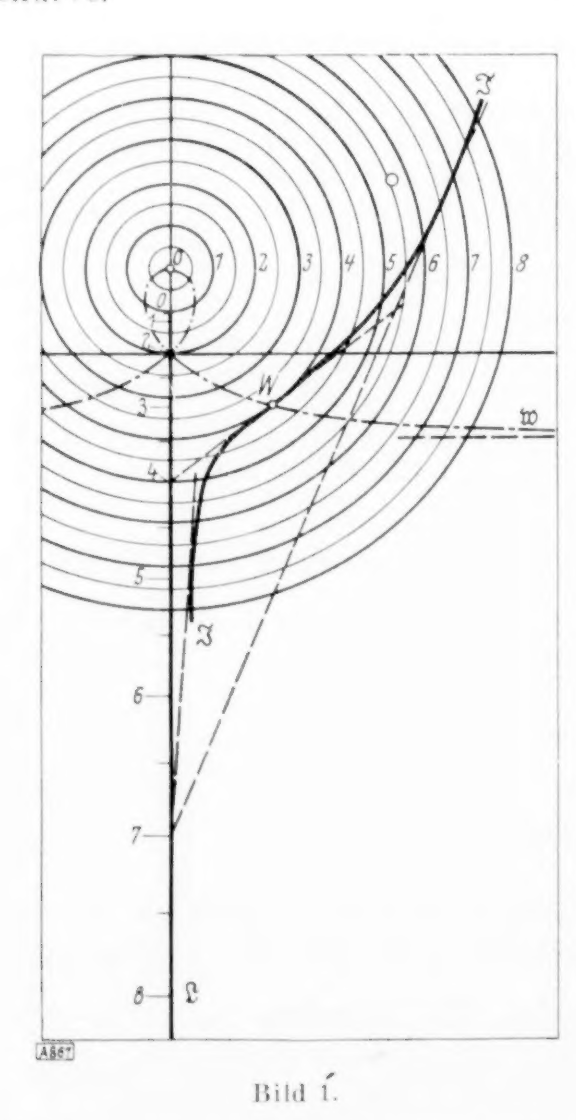


Bild 1.

Wählt man als Leitkurve irgendeine Gerade, dann läßt sich die Auflösung der Isopunktalengleichung (6) nach dem Parameter u besonders einfach durchführen. Als Beispiel betrachten wir die Riccatische Differentialgleichung

$$y' = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{x} \cdot y^2 + x\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Als Leitkurve nehmen wir die y-Achse und als Parameter zunächst η selbst. Dann ist

$$\xi = h(u) = 0, \qquad \eta = g(u) = u$$

und die Isopunktalenschar lautet nach (6)

$$y - x f(x, y) = y - \frac{1}{c}(x^2 + y^2) = u .$$

Sie besteht demnach aus Kreisen um $\left(0, \frac{c}{2}\right)$ als Mittelpunkt. Es erscheint zweckmäßig, an Stelle von $\eta = u$ den Halbmesser dieser Kreise als Parameter t zu wählen. Dann erhalten wir auf der Achse als Leitkurve eine nach t zu beziffernde Funktionsskala für $\eta = \frac{c}{4} - \frac{t^2}{c}$. Das fertige System Leitkurve - Isopunktalen ist in Bild 1 für den Wert $c = 4$ dargestellt. Eine durch graphische Integration gewonnene Integralkurve ist mit einigen Tangenten und der Wendepunktskurve $\mathfrak{W}$, die die Gleichung $x^2 = y^2 \cdot \frac{c - 2y}{c + 2y}$ besitzt, eingezeichnet. (Die geschlossene Lösung der gegebenen Riccatischen Differentialgleichung ergibt sich übrigens in der Form

$$y = x \cdot \frac{Z_1\left(\frac{x}{c}\right)}{Z_0\left(\frac{x}{c}\right)},$$

in der Z_0 und Z_1 der Anfangsbedingung angepaßte Zylinderfunktionen sind.)

Breslau. Helmut Heinrich. 867

Resonanzschwingungen von quadratisch gedämpften Systemen. Schwingungen mit quadratischer Dämpfung sind deshalb der mathematischen Behandlung schwer zugänglich, weil man die gesamte Schwingung nicht durch eine einzige Differentialgleichung beschreiben kann. Da die Reibungskraft stets der Bewegung entgegengerichtet ist, lautet nämlich die Gleichung entweder

$$\ddot{x} + \delta \dot{x}^2 + \omega^2 x = P(t) \quad \text{für} \quad \dot{x} > 0 \quad . \quad (1\,\mathrm{a})$$

oder

$$\ddot{x} - \delta \dot{x}^2 + \omega^2 x = P(t) \quad \text{für} \quad \dot{x} < 0 \quad . \quad (1\,\mathrm{b}),$$

wenn $P(t)$ die der Schwingung eingeprägte Kraft ist. Die Lösung des Systems (1) ist im allgemeinen überaus schwierig. Es gibt aber ähnlich wie bei Schwingungen mit linearer Dämpfung eine periodische Kraft von ganz bestimmtem Verlauf, die das System zu seiner rein sinusförmigen Resonanzschwingung anregt und diese Schwingung stationär aufrecht erhält, weil sie in jedem Augenblick gerade die Reibungsverluste deckt.

Den Verlauf dieser Kraft kann man leicht bestimmen, wenn man die Gl. (1) in zwei Teile spaltet:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

$$\pm \delta \dot{x}^2 = P(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und eine Lösung von (2)

$$x = A \sin \omega t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

in (3) einsetzt:

$$\left.\begin{aligned} P(t) &= \pm \delta \omega^2 A^2 \cos^2 \omega t \\ &= \pm P_0 \cos^2 \omega t = \pm \frac{P_0}{2}(1 + \cos 2\omega t) \end{aligned}\right\} \quad . \quad (5).$$

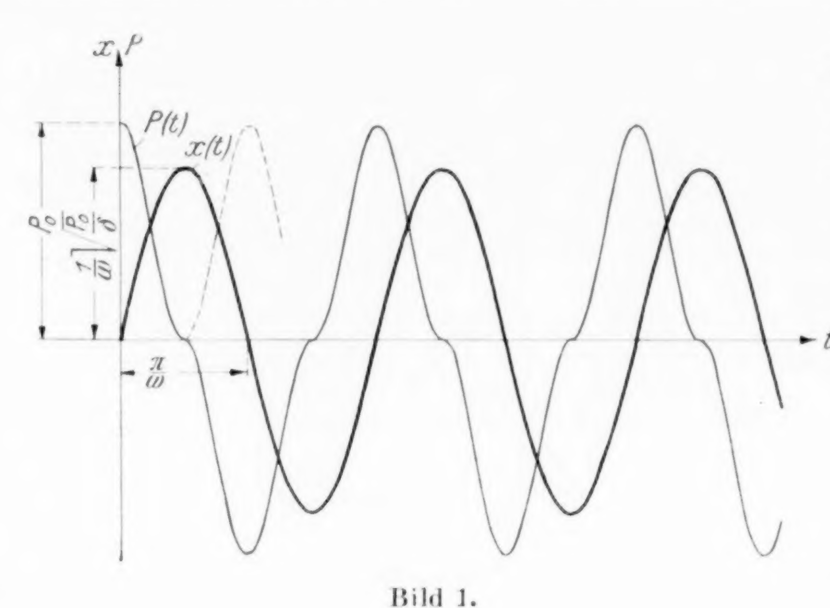


Bild 1.

Läßt man diese Kraft, die die Kreisfrequenz 2ω hat, jeweils nach einer vollen Periode $\frac{2\pi}{2\omega}=\frac{\pi}{\omega}$ ihr Vorzeichen wechseln, so kann das quadratisch gedämpfte System mit seiner Resonanzfrequenz rein sinusförmig schwingen, da sich dann seine Bewegungsrichtung nach einer halben Periode, d. h. ebenfalls nach der Zeit $\frac{\pi}{\omega}$ ändert. Die Amplitude des schwingenden Systems ergibt sich aus (5) zu

$$A=\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{P_0}{\delta}}\,.$$

Kraft- und Bewegungsverlauf zeigt Bild 1.

Dresden. Gerhart Rudolph. 880

Zur näherungsweisen Lösung zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten. Soll man zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten

$$f(x,y)=0 \quad \text{und} \quad g(x,y)=0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

lösen, so muß man sich zunächst durch rohes Skizzieren der Kurven

$$f(x,y)=0\;(\mathfrak{C}_1) \quad \text{und} \quad g(x,y)=0\;(\mathfrak{C}_2)$$

die ungefähre Lage ihrer Schnittpunkte überlegen. Seien x_1, y_1 die so gefundenen Koordinaten für die erste Näherung eines gewissen Kurvenschnittpunktes. Zur Verbesserung der Näherung wird meist das Newtonsche Verfahren oder das Iterationsverfahren vorgeschlagen. Beide Verfahren sind aber in vielen Fällen entweder überhaupt nicht konvergent oder ihre Konvergenz gegen den gesuchten Schnittpunkt ist nur ziemlich mühselig sicherzustellen. Es ist daher von Interesse, ein Verfahren zu entwickeln, das in den meisten praktisch vorkommenden Fällen sicher zum Ziele führt, und zwar immer dann, wenn der Schnittwinkel der beiden Kurven $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ (wozu also f und g als mit stetigen Ableitungen erster Ordnung begabt vorauszusetzen sind) von 0 bzw. π verschieden und die Ausgangsnäherung schon (in einem gleich zu präzisierenden Sinn) genügend genau ist. Das vorzutragende Verfahren hat den Vorteil, daß sämtliche Näherungspunkte im gleichen von $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ bestimmten Quadranten liegen und die Näherung monoton verläuft in dem Sinne, daß die Entfernung der einzelnen Näherungspunkte vom wahren Kurvenschnittpunkt monoton nach 0 abnimmt[1]). Die erforderliche Rechenarbeit ist dabei kaum größer als die für das Newtonsche Verfahren aufzuwendende, wenn man das Verfahren in der hier gewählten Kombination zwischen Rechnung und Zeichnung durchführt.

[1]) So ist also dieses Verfahren als eine Übertragung des Verfahrens zur Lösung einer Gleichung mit einer Unbekannten anzusehen, wie es an erster Stelle in dem zusammenfassenden Bericht geschildert wird von R. v. Mises und H. Pollaczek-Geiringer, Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung, ZAMM **9** (1929), S. 58 bis 77, insbesondere S. 59 bis 61.

Ich beginne mit der Schilderung des Verfahrens: Durch Skizzieren der Kurven $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ sei gefunden, daß der wahre Kurvenschnittpunkt in einem die erste Näherung x_1, y_1 enthaltenden Rechteck R liegen muß. Wir denken uns zunächst an die Fläche $f(x,y)$ in jedem Punkt über R die Tangentialebene gelegt:

$$Z-f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(Y-y).$$

Unter der Fallinie einer Ebene $ax+by+cz+d=0$ verstehen wir diejenige (nur bis auf Parallelverschiebung bestimmte) Gerade der Ebene, die mit der x,y-Ebene den größten Winkel φ einschließt. Ersichtlich ist

$$\cos\varphi=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,.$$

Suchen wir jetzt unter unseren Tangentialebenen diejenige steilster Fallinie, so bekommen wir ihren Winkel φ_1 gegen die x,y-Ebene aus der Formel

$$\cos\varphi_1=\frac{1}{\operatorname{Max}\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}\,.$$

Jetzt legen wir durch den Raumpunkt $x_1, y_1, f(x_1, y_1)$ den „Fallkegel", d. h. den Kreiskegel, dessen Erzeugende mit der x,y-Ebene diesen Winkel φ_1 bilden. Sein Schnitt mit der x,y-Ebene sei der „Fallkreis" $\mathfrak{K}_1$. Analog zeichnen wir (beide Male in entsprechend vergrößertem Maßstab) für die Fläche $g(x,y)$ den Fallkreis $\mathfrak{K}_2$ (Bild 1).

Die Tangenten aller Niveaukurven $f(x,y)=\text{const}$ erhält man mit Hilfe der Formel

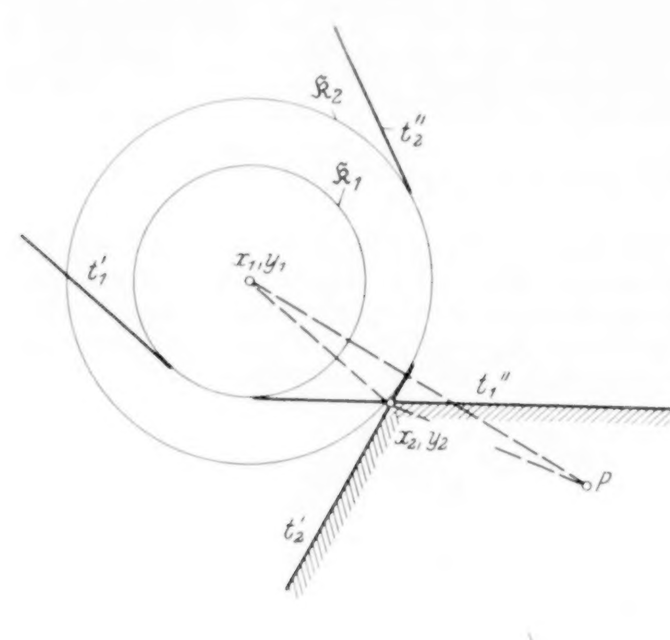
$$y'=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}\,.$$

Mit Hilfe dieser und der entsprechenden Formel für $g(x,y)$ (oder durch Skizzieren) sei noch gefunden, daß in R die Tangenten an die Kurven $f=0$ bzw. $g=0$ um zwei mittlere Richtungen t_1 bzw. t_2 höchstens um den Winkel α_1 bzw. α_2 schwanken. t_1 und t_2 mögen (gemessen in den x_1, y_1 enthaltenden Quadranten) den Winkel α einschließen und es sei

$$\alpha_1+\alpha_2<\pi-\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Wir zeichnen an die beiden Fallkreise je die beiden ungünstigsten Tangenten t_1', t_1'' bzw. t_2', t_2''. Durch Feststellung der Vorzeichen der partiellen Ableitungen läßt sich leicht entscheiden, nach welchen Seiten hin die Flächenhöhen f und g abnehmen. Bild 1 ist gezeichnet unter der Annahme, daß $\mathfrak{C}_1$ unter $\mathfrak{K}_1$ verläuft, $\mathfrak{C}_2$ rechts von $\mathfrak{K}_2$. Durch t_1'' und t_2' wird dann ein Winkelraum abgegrenzt, in dem der wahre Kurvenschnittpunkt liegen muß. Denn die wahre Kurve $f=0$ liegt unter dem von t_1', t_1'' und dem Zwischenbogen von $\mathfrak{K}_1$ gebildeten Kurvenzug, analog $g=0$ rechts von dem durch t_2', t_2'' und dem Zwischenbogen von $\mathfrak{K}_2$ gebildeten Linienzug. Nehmen wir den Schnittpunkt von t_1'' und t_2' als neue Näherung x_2, y_2, so liegt diese Näherung sicher dichter an dem wahren Kurvenschnittpunkt P, da das Dreieck mit den Ecken P, x_1, y_1 und x_2, y_2 bei der letzten Ecke stumpfwinklig ist. — Dazu muß man noch bemerken, daß

dieser Schluß nicht mehr notwendig richtig ist, falls t_1'' und t_2' sich nicht schneiden (Bild 2). Nimmt man jetzt etwa die neue Näherung auf dem Zwischenbogen von $\mathfrak{K}_2$ an, so könnte P z. B. sehr weit links dicht an t_2' liegen, so daß die Ausgangsnäherung besser gewesen wäre als die neue. Im Fall von Bild 2 hätte man den Berührungspunkt von t_2' als neue Näherung wählen können.



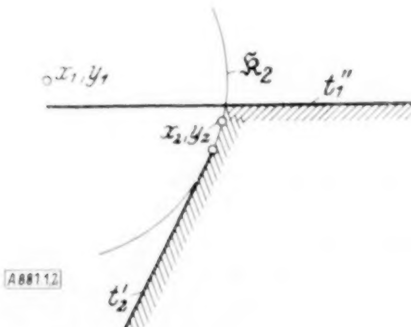


Bild 1 u. 2.

Alle durch Wiederholung dieses Verfahrens gewonnenen Näherungspunkte liegen im gleichen durch $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ gebildeten Quadranten und rücken in diesem monoton auf den wahren Kurvenschnittpunkt zu. Daß die Konfiguration von Bild 1 oder 2 vorliegt, folgt aus der Voraussetzung (2), da t_1'' und t_2' nach der den Fallkreisen abgewandten Seite den Winkel $\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 < \pi$ einschließen.

Als **Beispiel** suchen wir eine Lösung der beiden Gleichungen

$$f(x, y) = 3x^3 + y^3 - 2x + 1 = 0$$

und

$$g(x, y) = y^3 - 2x^3 + y^2 - x^2 + 3 = 0.$$

Um zunächst die Kurven $f = 0$ und $g = 0$ zu skizzieren [2]), schreiben wir:

$$f = 0 \quad \| \quad y_1 = \sqrt[3]{-3x^3 + 2x - 1},$$

$$g = 0 \quad \| \quad y_2^2 (y_2 + 1) = 2x^3 + x^2 - 3.$$

Wir rechnen: $y_1(0) = -1$, und mit Hilfe der unteren und oberen festen Skala des Rechenschiebers lesen wir aus

$$y_2^2(0)(1 + y_2(0)) = -3 \quad \text{sofort} \quad y_2(0) = -1{,}86$$

ab. In der gleichen Weise rechnen wir mit dem Rechenschieber folgende Werte und tragen die zugehörigen Punkte in Bild 3 auf, indem wir die Punkte von $f = 0$ durch Kreuze, die von $g = 0$ durch kleine Kreise unterscheiden:

$$y_1(1) = -1{,}26 \qquad y_1\left(\frac{1}{2}\right) = -0{,}72$$

$$y_1\left(\frac{3}{4}\right) = -0{,}91 \qquad y_1(0{,}9) = -1{,}12$$

$$y_2(1) = -1 \qquad y_2\left(\frac{1}{2}\right) = -1{,}79$$

$$y_2\left(\frac{3}{4}\right) = -1{,}54 \qquad y_2(0{,}9) = -1{,}38.$$

Die richtige Schnittpunktsabszisse des aus Bild 3

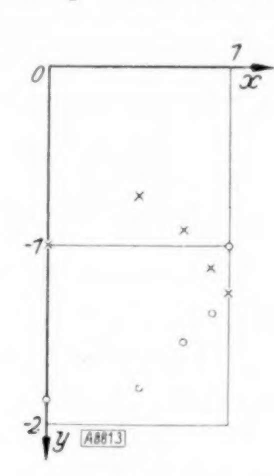


Bild 3.

zu entnehmenden Schnittpunktes liegt also zwischen 0,9 und 1, die Ordinate zwischen $-1{,}3$ und $-1{,}1$. Wir bilden

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 9x^2 - 2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2,$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -6x^2 - 2x, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = 3y^2 + 2y.$$

Als Ausgangspunkt der jetzt (auf Millimeterpapier) anzulegenden Zeichnung wählen wir etwa

$$x_1 = 0{,}95 \qquad y_1 = -1{,}2.$$

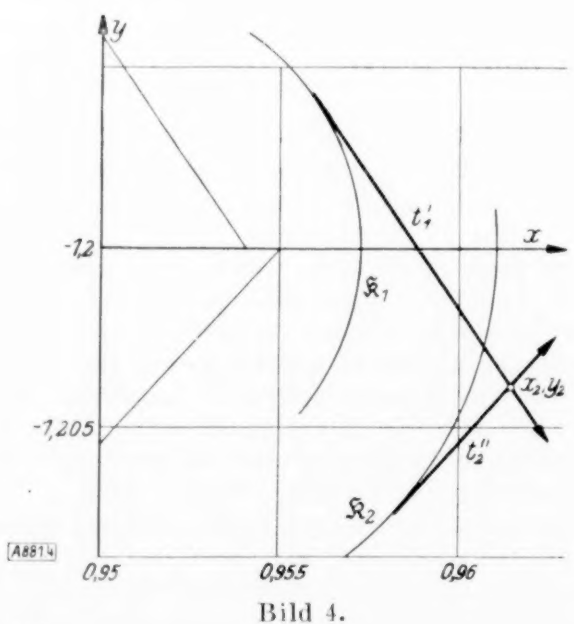


Bild 4.

Dafür ist

$$f(x_1, y_1) = 2{,}572 - 1{,}728 - 1{,}9 + 1 = -0{,}056,$$

$$g(x_1, y_1) = -1{,}728 - 1{,}715 + 1{,}44 - 0{,}903 + 3 = 0{,}094.$$

Da die Fallkegel außerordentlich steil sind, werden die Radien der Fallkreise jedenfalls nicht viel größer sein als 0,01. Für die Tangentenrichtungen der Kurven $f = \text{Const}$ und $g = \text{Const}$ findet man

$$y_1' = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{9x^2 - 2}{3y^2}, \quad \text{bzw. } y_2' = \frac{6x^2 + 2x}{3y^2 + 2y}.$$

[2]) Man könnte übrigens leicht y aus der ersten Gleichung ausrechnen und in die zweite einsetzen; oder man könnte sich wenigstens die zweite Gleichung vereinfachen, indem man den Wert von y^3 aus der ersten einsetzt. Das ist jedoch alles nicht nötig.

Infolge $\frac{\partial f}{\partial x} > 0$ und $\frac{\partial g}{\partial x} < 0$ haben wir die ungünstigsten Tangenten von Bild 1 nach rechts hin an die Fallkreise zu legen, und zwar überlegt man sich sofort, daß wir nur je die steilstmögliche zu zeichnen brauchen. Da auch diese Tangenten sehr steil sind, ist anzunehmen, daß der wahre Kurvenschnittpunkt eine Abszisse etwa zwischen 0,95 und 0,96 besitzt, seine Ordinate wird zwischen $-1,2$ und $-1,21$ liegen. Damit ist der Maßstab der Zeichnung festgelegt (Bild 4). Wir finden

$$\cos\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + (9\cdot 0{,}96^2 - 2)^2 + 9\cdot 1{,}21^4}} = \frac{1}{7{,}73},$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + (6\cdot 0{,}96^2 + 2\cdot 0{,}96)^2 + (3\cdot 1{,}21^2 - 2\cdot 1{,}21)^2}} = \frac{1}{7{,}77},$$

die Radien der Fallkreise werden

$$r_1 = \frac{|f(x_1, y_1)|}{\operatorname{tg}\varphi_1} = \frac{0{,}056}{\sqrt{7{,}73^2 - 1}} = 0{,}0073,$$

$$r_2 = \frac{0{,}094}{\sqrt{7{,}77^2 - 1}} = 0{,}0122.$$

Weiter wird

$$y_1' \geqq -\frac{9\cdot 0{,}96^2 - 2}{3\cdot 1{,}2^2} = -1{,}46,$$

$$y_2' \leqq \frac{6\cdot 0{,}96^2 + 2\cdot 0{,}96}{3\cdot 1{,}2^2 + 2\cdot 1{,}2} = 1{,}11.$$

Aus der Zeichnung lesen wir ab:

$$x_2 = 0{,}9614. \qquad g_2 = -1{,}2038.$$

Bemerkung: Einige wesentliche Punkte der Zeichnung überschreiten zwar das der Rechnung zugrunde gelegte Gebiet $0{,}95 \leqq x \leqq 0{,}96$ und $-1{,}21 \leqq y \leqq -1{,}2$ um ein Geringes, das wird aber nichts Wesentliches ausmachen. Tatsächlich rechnet sich, erstmals unter Verwendung einer fünfstelligen Logarithmentafel,

$$f(x_2, y_2) = -0{,}0014, \qquad g(x_2, y_2) = 0{,}0032.$$

Wir sind also trotz der eben erwähnten Ungenauigkeiten doch im gleichen Kurvenquadranten geblieben. Man wird jetzt gegebenenfalls das Verfahren fortsetzen, indem man von x_2, y_2 ausgeht.

Braunschweig. Rudolf Iglisch. 881

BUCHBESPRECHUNGEN

Dr. HUGO **DINGLER,** o. Prof. a. d. Techn. Hochsch. München, Die Methode der Physik. 422 S. München 1938, Verlag von Ernst Reinhardt. Preis geb. 13 M.

Das Buch bildet einen zusammenfassenden Abschluß der in einer Reihe früherer Veröffentlichungen durchgeführten Untersuchungen über die Frage nach einer die Sicherheit und Allgemeingültigkeit physikalischer Aussagen gewährleistenden Methode. Dingler ist der Ansicht, daß es falsch sei — wie es die heute herrschende „Schulmeinung" tue —, die physikalischen Gesetze als allgemeine Eigenschaften der Natur zu betrachten und durch messende Versuche auf Grund des Prinzips der Induktion erschließen zu wollen; damit komme man nicht zu einem eindeutigen, die Sicherheit der Aussagen verbürgenden System, sondern zu einer Vielheit nicht miteinander im Einklang befindlicher Theorien. Er verlangt wie für die Mathematik so auch für die Physik einen axiomatischen Aufbau, der zum „eindeutig-methodischen System" der Physik führe. Die Methode, die das leiste, müsse auf dem Prinzip der einwandfreien und lückenlosen Begründung beruhen (also unwiderleglich sein), das Prinzip der Ordnung befolgen (d. h. jeder Schritt dürfe nur Schritte voraussetzen, die ihm vorangehen) und damit die Forderung der Eindeutigkeit (oder, was damit oft äquivalent sei, der Einfachstheit) erfüllen. Die Grundlagen dieses Systems werden von Aussagen „vorsystematischer" Natur gebildet, die nach Dinglers Meinung unmittelbare Sicherheit in sich tragen; dazu gehören vor allem die sog. Relationserkenntnisse (Gleichheits-, Ähnlichkeits- und Verschiedenheitserkenntnisse). Zwischen diese vorsystematischen Aussagen (die im wesentlichen Definitions- und Handlungs- oder Willenssätze sind) und das auf ihnen durch die Anwendung der Gesetze der Logik aufgebaute System schiebt sich aber nach Dingler noch der „Realisierungsprozeß", der Bereich manueller Betätigung, der für die Grundlegung der Wissenschaft ebenso grundlegend sei wie Experiment und Theorie — was die heutige Physik leider nicht berücksichtige; sonst könnte sie z. B. nicht behaupten, die Frage der Krümmung des Raumes sei mit Hilfe von Messungen zu entscheiden, da ja aller Instrumentenbau auf der Anwendung der Euklidischen Geometrie beruhe, man also mit Hilfe solcher Instrumente nie zu einer andern Form der Geometrie gelangen könne als zur Euklidischen. Bei Grundlegung der Geometrie (die der der Physik vorauszugehen habe) kommt Dingler — vor allem durch Verwendung des Prinzips der Eindeutigkeit, das ihm die Definitionen für die geometrischen Grundbegriffe liefert — zur Euklidischen Geometrie als der im eindeutig-methodischen System allein möglichen. Beim axiomatischen Aufbau der Dynamik erhält er durch wiederholte Anwendung des Prinzips der Einfachstheit ohne Zuhilfenahme oder Ausnutzung irgendwelcher messenden Versuche als „Elementargestalt" der Dynamik das Newtonsche Attraktionsgesetz. Mit dem im Euklidischen Raume geltenden Newtonschen Gesetz ist nach Dingler die Grundlage für einen systematischen Aufbau der Physik gegeben, eine Grundlage, die durch kein Experiment erschüttert, durch keine neue Entdeckung in Frage gestellt werden könne. Die Verdienste, die sich neuere Theorien wie Quanten- und Relativitätstheorie um den Fortschritt physikalischer Erkenntnis erworben haben, werden von Dingler zwar zugegeben, doch seien jene Theorien nur vorläufige Notbehelfe der vorwärtsstürmenden Forschung (sie gehören der „Frontphysik" an). Die gegenwärtige Situation sei eben nur eine Zwischenperiode der Forschung, die beendet sein würde, sobald der Aufbau des „eindeutig methodischen Systems" einmal ernsthaft in Angriff genommen würde; in diesem System würden dann auch die Ergebnisse jener Theorien ihren Platz finden. Völlig abwegig sei das heute geübte Verfahren, auf Grund einzelner Versuchsergebnisse (wie etwa des Michelsonversuchs) die alten klassischen (d. h. Newtonschen) Grundlagen durch neue ersetzen zu wollen. Bei der Darlegung und Verteidigung dieser Anschauungen, die von verschiedenen Seiten immer von neuem beleuchtet werden, geht es nicht ohne scharfe Angriffe auf die herrschende „Schulmeinung" ab; aber von den „populären Phantasien der Einstein, Planck, Heisenberg, Eddington" zu sprechen geht doch wohl etwas weit. Auch hätte man an Stelle von allgemein gehaltenen Andeutungen („da werden wir belehrt", „es wird darauf hingewiesen" usw.) genauere Angaben gewünscht, etwa über die Werke, in denen „man behauptet, Galilei habe die Galilei-

transformationen geschaffen" (S. 295). Ein kleiner Irrtum findet sich auf S. 168: nicht der Historiker des Materialismus, F. A. Lange, sondern Ludwig Lange war der Schöpfer des Inertialsystems. Noch eine Bemerkung zu dem Dinglerschen System selbst. Sobald man den axiomatischen Ausgangsforderungen Dinglers zustimmt, wird man auch die Folgerungen und damit den ganzen Aufbau der Physik, so wie er ihn sich denkt, bejahen müssen. Ob freilich das Fundament des „eindeutig-methodischen Systems" wirklich jenen Grad von unmittelbarer Sicherheit und Ausschließlichkeit hat, von dem er überzeugt ist, und ob man sein Prinzip der Eindeutigkeit bzw. Einfachstheit so auslegen und anwenden muß, wie er es vorschreibt, oder ob man nicht vielmehr in dem Aufbau eines eindeutigen Systems der Physik ein Ideal sieht, dessen Erreichung sich nur auf Grund der Fortschritte unserer Erfahrungen in einem asymptotischen Prozesse anstreben, nicht aber durch diktatorische Maßnahmen in seinen Grundlagen wie in seiner Richtung erzwingen läßt, das ist eine andere Frage, die hier nicht zur Erörterung steht.

Berlin. E. Mosch. 840

Dr.-Ing. ERWIN **MAYER,** VDI, Einfluß der Querschnittsverformung auf die Entwicklung der Geschwindigkeits- und Druckverteilung bei turbulenten Strömungen in Rohren. (VDI-Forschungsheft 389, Beilage zu „Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens", Ausgabe B, Bd. 9, März/April 1938.) 20 S. m. 64 Abb. Berlin 1938, VDI-Verlag G. m. b. H. Preis br. 5 M.

Es handelt sich hier um sehr sorgfältig durchgeführte praktische Untersuchungen über den Geschwindigkeits- und Druckverlauf in einem Rohr von konstanter Querschnittsgröße, aber veränderlicher Querschnittsform (Übergang vom Kreis auf das Rechteck und umgekehrt). Die Ergebnisse entsprechen in jeder Hinsicht dem, was auf Grund allgemeiner strömungstechnischer Überlegungen sich einstellen muß. Eine genaue mathematische Berechnung der Vorgänge ist bis heute noch nicht möglich. Von Wichtigkeit ist, daß nirgends in den Strömungen Ablösungserscheinungen beobachtet wurden, selbst dort nicht, wo die Strömung nicht unerheblich verzögert wird.

Dresden. E. Sörensen VDI. 858

Dr.-Ing. ALBRECHT **HUSSMANN,** Rechnerische Verfahren zur harmonischen Analyse und Synthese mit Schablonen für eine Rechnung mit 12, 24, 36 oder 72 Ordinaten. 28 S. mit 24 Abb. im Text und auf 2 Tafeln sowie 10 Berechnungstafeln. Berlin 1938, Verlag von Julius Springer. Preis steif geh. 9,60 M.

Für die in vielen Gebieten der Physik und Technik gebrauchte harmonische Analyse enthält das vorliegende Heft eine Reihe sehr brauchbarer Rechenblätter, die dem vor 25 Jahren von Runge und Emde herausgegebenen Rechenformular ähnlich sind. Sie beschränken sich aber nicht wie dieses Formular und wie die bekannten Schablonen von Zipperer und wie die von Terebesi auf die Benutzung von 24 Ordinaten, sondern sehen die Verwendung von 12, 24, 36 oder 72 Ordinaten vor. Im letzten Fall ermöglicht die in die Rechnung eingehende große Zahl von Ordinaten die Bestimmung von Oberschwingungen höherer Ordnung, die oft von Wichtigkeit sind. Im einführenden Text werden die Grundlagen der harmonischen Analyse und Synthese auseinandergesetzt, der Aufbau der Rechenschemata erörtert und die Durchführung sowohl der Analyse wie der Synthese unter Benutzung der Rechenblätter an einem Beispiel vorgeführt; insbesondere werden die in die Formulare aufgenommenen Kontrollen erläutert. Weiter werden der Fehler des Näherungsverfahrens und Methoden zu seiner Abschätzung und Verbesserung besprochen. Zur Berechnung einzelner Teilwellen höherer Ordnung wird die Methode von Fischer-Hinnen empfohlen. Der Anhang enthält die 10 Rechenformulare, die so aufgebaut sind, daß die Rechnung auch von Hilfskräften durchgeführt werden kann. Den Gebrauch denkt sich Verfasser so, daß diese Formulare mit durchsichtigem Papier überspannt und auf diesem an den entsprechenden Stellen die Zahlen notiert werden. Praktischer und übersichtlicher wäre es nach meiner Ansicht, wenn man die Rechnungen auf den Blättern selbst ausführen könnte. Um das zu ermöglichen, müßte sich allerdings der Verlag entschließen, die Formulare einzeln zu billigen Preisen in den Handel zu bringen.

Dresden. Willers. 877

B. **RIEMANN,** Partielle Differentialgleichungen und ihre Anwendungen auf physikalische Fragen, herausgegeben von Karl Hattendorff, m. einem Vorwort von Prof. Dr.-Ing. e. h. Fritz Emde (Stuttgart). XII + 325 S. Braunschweig 1938, Verlag Friedr. Vieweg & Sohn. Preis geb. 9,60 M.

Nach Riemanns Tode gab Hattendorff unter Benutzung einer zusammenfassenden Ausarbeitung Riemanns auf Grund seiner eigenen Nachschrift die Vorlesung von B. Riemann über partielle Differentialgleichungen, die dieser zuerst 1854 und weiterhin noch zweimal gehalten hatte, heraus. Schon in dieser ersten Bearbeitung ist wie in den späteren etwa die Hälfte, nämlich die drei ersten Abschnitte: Bestimmte Integrale, Unendliche Reihen (Fouriersche Reihen) und Differentialgleichungen den mathematischen Grundlagen, die andere Hälfte: Bewegung der Wärme in festen Körpern, Schwingungen elastischer fester Körper und Bewegung der Flüssigkeiten den Anwendungen gewidmet. Das Buch erlebte in dieser Form drei Auflagen, die letzte 1882. Von dieser gibt jetzt Emde einen unveränderten Abdruck heraus. Nach Hattendorffs Tode übernahm Heinrich Weber die Bearbeitung. Die vierte von ihm herausgegebene Auflage erschien 1900/1901. Nachdem nach seinem Tode noch ein unveränderter Abdruck des Riemann-Weber herausgekommen war, wurde vor etwa zehn Jahren das Werk unter Mitwirkung einer großen Zahl von Bearbeitern vollkommen neu gestaltet. Dadurch wurde aber der Charakter des Buches gänzlich geändert, aus einem Lehrbuch wurde ein Nachschlagewerk. Der Umfang, der in der Hattendorffschen Ausgabe etwas über 300 Seiten betragen hatte und der schon in der Bearbeitung von Weber auf rund 1000 Seiten angewachsen war, schwoll jetzt auf über 2000 Seiten an. Es ist daher zu begrüßen, daß das Werk in der ursprünglichen Fassung wieder allgemein zugänglich gemacht ist. Wenn man natürlich heute auch manches anders darstellen würde, wird vielleicht doch mancher gern zu dieser klassischen Darstellung von Riemann greifen.

Dresden. Willers. 873

FRANCESCO **TRICOMI,** Funzioni Analitiche (Consiglio Nazionale Delle Ricerche, Monografie di Matematica Applicata, 1936/XIV). VI + 110 S. Bologna 1936, Nicola Zanichelli Editore. Preis 35 Lire.

FRANCESCO **TRICOMI,** Funzioni Ellittiche (Consiglio Nazionale Delle Ricerche, Monografie di Matematica Applicata, Bologna 1937/XV), IX + 274 S. Bologna 1937, Nicola Zanichelli Editore. Preis 45 Lire.

Das Erscheinen dieser Bücher in einer Reihe, die ausdrücklich der angewandten Mathematik dienen soll, kann ein leichtes Staunen hervorrufen, wenn man beim ersten Durchblättern feststellt, daß 1) die üblichen Gegenstände der (deutschen) Universitätsvorlesungen über allgemeine Funktionentheorie umfaßt, während in 2) über 200 Seiten der Theorie und nur 40 den Anwendungen der elliptischen Funktionen gewidmet sind. Indes zeigt eine genauere Prüfung, daß die Einstellung des zweiten Werkes (das erste soll nur eine — recht gute — Einleitung dazu sein) zur Anwendung hin zwar nicht so sehr äußerlich, dafür aber um so mehr in der Ausführung des klassischen Stoffes zum Ausdruck kommt: Von Anfang an ist mit Zeichnungen und besonders den Emdeschen Reliefdarstellungen die Anschauung unterbaut, dann aber in aller Einzelauswahl des Stoffes und in der Durchführung immer zielbewußt der Grundsatz verfolgt, alles bis zum Beginn der reinen numerischen Rechnung Notwendige übersichtlich bereitzustellen: Die Formeln, mit denen die Zurückführung auf tabulierte Funktionen gelingt, sind bequem greifbar gemacht; und für die Fälle, wo tabulierte Funktionen noch nicht zur Verfügung stehen, ist der Anschluß an bestkonvergente Reihenentwicklungen geboten, die dem Rechner mit dem Bleistift oder der Maschine keinen erheblichen Zeitaufwand verursachen. Soweit Stichproben es zeigen können, ist das Buch in der Wiedergabe der Formeln zuverlässig. —

In der Darstellung fällt noch auf, daß der Verf. auf die praktisch wichtigen Sonderfälle der für reelles z reellwertigen Funktionen gründlich eingeht und sie durch Kurvenbild und -besprechung dem Leser nahebringt. Sehr verdienstlich ist das gute Schlagwortverzeichnis, eine breitere Formelsammlung und last not least eine Übersicht über die verschiedenen abweichenden Bezeichnungen der Verfasser von Werken über den Gegenstand.

So glauben wir, daß auch andere, die mit Anwendungen der Mathematik zu tun haben, das vorliegende Werk als das z. Zt. der angewandten Mathematik nächste über den Gegenstand dankbar anerkennen werden.

Gießen. E. Ullrich. 885

Dr. GUIDO **HOHEISEL,** a. o. Prof. a. d. Universität Greifswald, Gewöhnliche Differentialgleichungen. 3. neu bearb. Aufl. (Sammlung Göschen Bd. 920). 126 S. Berlin 1938, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 1,62 M.

Die neue Auflage des Bändchens von Hoheisel, die im einzelnen an verschiedenen Stellen umgearbeitet und ergänzt ist, bringt im wesentlichen den gleichen Stoff wie die vorige Auflage und zwar gegliedert in drei Kapitel, deren erstes den Differentialgleichungen erster Ordnung gewidmet ist, während das zweite kurz Gleichungen höherer Ordnung und lineare Gleichungen, das dritte Randwertaufgaben behandelt. In einem Anhang wird weiter die Abhängigkeit der Lösungen von Anfangswerten und Parametern untersucht. Die Darstellung beschränkt sich dabei durchgehend auf reelle Variable. Als erste Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen kann das kleine Bändchen durchaus empfohlen werden.

Dresden. Willers. 914

Dr. OTTO **LANKES** und Dr. LUDWIG **BAUMGARTNER,** Wirklichkeit und Formel, ein mathematisches Lesebuch für die Jugend und das Volk. Teil I. VIII + 112 S. m. 3 Bildern von Josef Bergmann u. 45 Fig. Bamberg 1935, C. C. Buchners Verlag. Preis brosch. 1,40 M. Teil II. IX + 146 S. m. einem Bild von Josef Bergmann und 46 Fig. Bamberg 1938. Preis brosch. 2,40 M.

Die Verfasser sind der Meinung, daß, „wie im Mittelalter das Latein, so heute die mathematische Formelsprache die Gemeinschaft der nach Erkenntnis Strebenden zerklüftet". Um diese Kluft zu überbrücken, haben sie in den beiden vorliegenden Bändchen „es gewagt, dies Latein der Formeln in unser geliebtes Deutsch zu übertragen", indem sie „von der Wirklichkeit her die Welt der mathematischen Formeln erschließen". Gegen dieses nicht gerade neue Verfahren ist grundsätzlich durchaus nichts einzuwenden; im Gegenteil: die Wahl der Beispiele, die Reichhaltigkeit des Materials, das vorsichtige Vorwärtsschreiten bei Einführung schwieriger Begriffe verdienen durchaus Anerkennung. Leider bevorzugen aber die Verfasser bei der Darbietung der Beispiele eine Breite der Darstellung, die das Wesentliche gelegentlich allzusehr in den Hintergrund drängt, so daß mancher Leser schon etwas ermüdet sein könnte, ehe er an den Kern der Sache kommt. Jedenfalls helfen die wortreichen Schilderungen in keiner Weise zur Erzielung besseren Verständnisses für die mathematische Zeichensprache; wie zur Zeit des Euklid gibt es auch heute noch keinen Königsweg zur Mathematik. Den Verfassern war es, wie sie sagen, hauptsächlich um die Klärung der Begriffe des Grenzwerts, des Differentialquotienten und des Integrals zu tun. Hier fallen einige Entgleisungen unangenehm auf. So wird im I. Teil S. 86 „beliebig groß" und „unendlich groß" als dem Sinne nach identisch hingestellt. Auf S. 108 wird das Leibnitzsche dx als „der beliebig kleine, oder, was nichts anderes bedeutet, der unendlich kleine Koordinatenunterschied" definiert. Im II. Teil, S. 112, heißt es sogar, daß „die noch greifbaren Größen Δx, Δy erst im Dahinschwinden zu den Differentialen dx, dy werden". Das ist eine Mystik, von der man in den grundlegenden Abhandlungen Leibniz' — etwa der „Nova Methodus pro Maximis et Minimis", wo der Differentialbegriff klar entwickelt wird — nichts findet. Erfreulich ist die Fülle von Anwendungen auf physikalische und technische Probleme, denen wir besonders im II. Bändchen begegnen und die didaktisch meist recht geschickt behandelt werden. Der junge Lehrer, der sich mit der Didaktik und Methodik des schwierigen Gebietes beschäftigt, wird manche Anregung für seinen Unterricht finden.

Berlin. E. Mosch. 840

GERHARD **KOWALEWSKI,** Magische Quadrate und magische Parkette. Mit 10 Fig. u. einem Titelbild. Scientia Delectans Heft 2. 78 S. Leipzig 1937. Verlag K. F. Koehlers Antiquarium. Preis brosch. 2 M.

Den seit Jahrhunderten viel behandelten magischen Quadraten gewinnt Verfasser neue Aufgaben ab, indem er aus den 880 vierreihigen magischen Quadraten, die Frénicle de Bressy als möglich aufgezählt hat, durch besondere Bedingungen Klassen aussondert. Sind die Zahlen 1—16 in einer quadratischen Matrix a_{ik} ($i = 1, \ldots 4$; $k = 1 \ldots 4$) angeordnet, so ist die Bedingung für ein magisches Quadrat, daß die Summen jeder Horizontal-Vertikal- und Diagonalreihe gleich sind ($= 34$). K. schreibt noch eine Kreuzbedingung vor: $a_{12} + a_{43} = a_{24} + a_{31} = s$. Indem die Zahlen als Gewichte gedeutet werden, ist so ein links gerichtetes Hauptkreuz ausgezeichnet, dessen Arme gleich belastet sind. Daraus ergibt sich ein rechts gerichtetes Gegenkreuz: $a_{13} + a_{42} = a_{21} + a_{34} = s'$. Bei dem von Dürers „Melancholie" bekannten Quadrat ist die Kreuzbedingung erfüllt und außerdem $s = s' = 17$. Magische Quadrate dieser Eigenschaft nennt Verf. Dürerquadrate zum Unterschied von den Sonnenquadraten, bei denen zwischen Belastung des einen und anderen Kreuzes der größtmögliche Unterschied 48 besteht.

Zu ihrer Untersuchung sowie der 48 Dürerquadrate werden die Zahlen 1—16 durch 0—15 ersetzt und durch $4q + r$ dargestellt; die Matrix der q bildet den Unterbau, die der r den Oberbau. Es werden dann Parkette gebildet: Dürerquadrate sind nicht parkettbildend; von den Sonnenquadraten vier. Verf. kommt zu einem neuartigen Parkett aus dunklen Quadraten und hellen Rhomben, das er den Architekten empfiehlt. Das ebene „panmagische" Parkett wird auch durch einen durchbohrten Würfel, d. h. die Projektion eines vierdimensionalen Würfels, ersetzt, wie das Verf. übrigens auch in dem von dem Byzantiner Moschopulos handelnden Abschnitt seines kürzlich erschienenen Buches: „Große Mathematiker" macht. Die kleine sehr klare Schrift über Magische Quadrate wird Liebhabern der Unterhaltungsmathematik viel Freude machen.

Frankfurt a. M. W. Lorey. 828

Dr. HANS **KELLERER,** Mathematik und Verkehr, eine lebensnahe Einführung in die Methoden der Statistik. (Math.-Physik. Bibl. Reihe I: hrsg. v. W. Lietzmann u. A. Witting, Bd. 94.) 48 S. m. 20 Abb. und 20 Aufg. Leipzig u. Berlin 1938, Verlag B. G. Teubner. Preis kart. 1,20 M.

An Hand von Beispielen, die den verschiedensten Gebieten des Verkehrslebens entnommen sind, führt der Verfasser in die einfachsten Rechenverfahren und Darstellungsformen der Statistik ein. Er gliedert den Stoff in drei Abschnitte. Im ersten behandelt er Mittelwerte, Streuungsmaße und Verhältniszahlen, im zweiten Häufigkeits- und Summentafeln, Häufigkeits-, Summen- und Konzentrationskurven, Belastungsbänder und Streuungsbilder und im letzten die statistische Bearbeitung zeitlich geordneter Zahlenreihen. Da die Darstellung ganz elementar gehalten ist, eignet sich das Bändchen für eine erste Einführung in das Gebiet der Statistik.

Dresden. Willers. 831

U. **PESONEN,** Messung der Basis Balaschov in Rußland, im Jahre 1935 (Baltische Geodätische Kommission, Sonderveröffentlichung Nr. 7). 16 S. Helsinski 1938, Verlag Osakeyhtiö Weilin & Göös, Aktiebolag.

Nachdem Rußland der Baltischen Geodätischen Kommission beigetreten war, wurde auf Anregung von I. Bonsdorff in dem baltischen Dreieckspolygon neben den bereits gemessenen sieben Grundlinien noch eine weitere, auf russischem Gebiet, in der Nähe von Balaschov gelegene Grundlinie gemessen. Die Messung der neuen Grundlinie erfolgte durch dieselben Beobachter V. R. Ölander und U. Pesonen sowie mit denselben Geräten wie die der älteren Grundlinien. Zur Verwendung kamen acht, je 24 m lange Invardrähte des Finnischen Geodätischen Instituts, von denen je vier in verschiedenen Jahren hergestellt wurden, so daß keine gleichartigen Längenänderungen zu erwarten waren. Die bei Grundlinienmessungen mit Invardrähten besonders wichtige Bestimmung der Drahtlängen erfolgt vor und nach der Messung auf Grund der finnischen Eichstrecke bei Nummela, deren Länge 36 Drahtlängen beträgt. Außerdem wurden die Drähte, auch vor und nach der Messung der Grundlinie, mit dem russischen Normalmaß in Moskau verglichen. Diese doppelte Eichung ergab einen geringen Unterschied zwischen der finnischen und der russischen Längeneinheit. Die Messung der Grundlinie erfolgte in der bei Messungen mit Invardrähten üblichen Anordnung. Der mittlere Fehler der Länge der etwas mehr wie 10 km langen Grundlinie beträgt ± 1,3 mm.

Stuttgart. P. Werkmeister. 872

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

American Mathematical Society, Semicentennial Publications Bd. I, RAYMOND CLARE **ARCHIBALD,** A Semicentennial History of the American Mathematical Society 1888—1938, with Biographies of the Past Presidents. 262 S. Bd. II, Semicentennial Addresses of the American Mathematical Society. 315 S. New York 1938, Verlag American Mathematical Society.

W. M. **SMART,** M. A., D. Sc., Regius Professor of Astronomy in the University of Glasgow, Stellar Dynamics. VIII + 434 S. Cambridge 1938, The University Press. Preis 30 Schilling.

JOSEF **REGLER,** Studienprofessor a. d. Höh. Techn. Lehranstalt Augsburg, Physikalische Aufgabensammlung für höhere Schule und Studium. 129 S. Leipzig 1939, Verlag Johann Ambrosius Barth. Preis 6,30 M.

KARL **MARBE,** Das Ausgleichsprinzip in der Statistik und verwandte Probleme. V + 164 S. München 1938, C. H. Becksche Verlagsbuchhandlung. Preis brosch. 8 M.

Dr. Dr. Ing. GEORG **SCHEFFERS,** Lehrbuch der Mathematik zum Selbstunterricht und für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik, eine Einführung in die Differential- und Integralrechnung und in die analytische Geometrie. VIII + 743 S. m. 438 Fig. Berlin 1938, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 15 M.

Dr. phil. OTTO **HAUPT,** Prof. a. d. Univ. Erlangen, unter Mitarbeit von Dr. phil. GEORG **AUMANN,** Prof. a. d. Univ. Frankfurt a. M., Differential- und Integralrechnung unter besonderer Berücksichtigung neuerer Ergebnisse (Göschens Lehrbücherei, Bd. 24), I. Bd. Einführung in die reelle Analysis. 196 S. m. 2 Fig. Berlin 1938, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 11,20 M.

Dgl. Bd. 25, II. Bd. Differentialrechnung. 186 S. m. 1 Fig. Berlin 1938, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 9,80 M.

Dgl. Bd. 26. III. Bd. Integralrechnung. 183 S. Berlin 1938, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 10,60 M.

Dr. techn. ADOLF **PUCHER,** Die Momenteneinflußfelder rechteckiger Platten („Deutscher Ausschuß für Eisenbeton", Heft 90). VI + 58 S. Berlin 1938, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn. Preis 5,50 M.

R. A. **FRAZER,** B. A. D. Sc., F. R. Ae. S. of the Aerodynamics Department, the National Physical Laboratory,

W. J. **DUNCAN,** D. Sc., A. M. I. Mech. E., F. R. Ae. S. Wakefield Professor of Aeronautics at the University of Hull,

A. R. **COLLAR,** B. A., B. Sc. of the Aerodynamics Department, the National Physical Laboratory, Elementary Matrices and Some Applications to Dynamics and Differential Equations. XVI + 416 S. Cambridge 1938, The University Press. Preis geb. 30 Schilling.

T. G. **ROOM,** M. A., Professor of Mathematics in the University of Sidney, The Geometry of Determinantal Loci. XXVIII + 483 S. Cambridge 1938, The University Press. Preis geb. 42 Schilling.

NACHRICHTEN

Arnold Sommerfeld zum 70. Geburtstag.

Vor wenigen Wochen begingen die deutschen Physiker die Feier des siebzigsten Geburtstages eines ihrer größten Theoretiker, A. Sommerfeld. Auch die Vertreter der Angewandten Mechanik haben allen Grund, bei diesem Anlaß mit Dankbarkeit des Mannes zu gedenken, der in jungen Jahren einmal einer der ihrigen war. Sommerfeld war nach seiner Studentenzeit Assistent von Felix Klein in Göttingen und wurde von diesem mit der Ausarbeitung und dem weiteren Ausbau einer Vorlesung über die Theorie des Kreisels betraut. Daraus ist das bekannte Kreiselbuch entstanden [1]). Es war wohl wesentlich dieses schöne Buch, das ihm, nachdem er ein paar Jahre die Studenten der Bergakademie Clausthal Mathematik gelehrt hatte, 1900 den Ruf auf den Mechaniklehrstuhl der Technischen Hochschule Aachen einbrachte. Wie sehr er sich mit der Schaffenslust, die seine ganze Lebensarbeit kennzeichnet, in diese ihm neue Aufgabe vertieft hat, zeigen seine Veröffentlichungen aus dieser Zeit. Am klarsten geht seine Auffassung von den Aufgaben der technischen Mechanik aus dem zusammenfassenden Bericht hervor, den er auf der Naturforscherversammlung in Kassel 1903 erstattet hat [2]). Liebevolle Versenkung in eine Einzelaufgabe zeigt eine Arbeit „Zur Theorie der Eisenbahnbremsen" [3]), in der der Bremsvorgang bei gegebenem Bremsdruck für ein experimentell festgestelltes, geschwindigkeitsabhängiges Reibungsgesetz in allen Einzelheiten durchdiskutiert ist und die Bremswege in Abhängigkeit vom Bremsdruck für normale Bremsung und auch für Übergang zu fest gebremsten, auf den Schienen gleitenden Rädern numerisch verfolgt ist. Von seinen Ideengängen und seinen anschaulichen Demonstrationsversuchen aus dieser Zeit findet man vieles in den Berichten des Aachener Bezirksvereins Deutscher Ingenieure. Wegweisend zeigt sich hier sein Vortrag „Zum dynamischen Ausbau der Festigkeitslehre" (3. Juli 1901), in dem er sich vor allem mit Schwingungserscheinungen befaßt und u. a. seinen „Wackeltisch" demonstriert, einen Tisch, dessen Platte durch einen mit einem exzentrischen Gewicht versehenen Elektromotor in Resonanzschwingungen versetzt wird und durch eine Rückwirkung auf den Schwingungserreger die Drehzahl des Motors in sehr auffälliger Weise beeinflußt. Ein anderer Vortrag befaßt sich mit der Bestimmung der Knicklast eines Stabes durch Beobachtung seiner Eigenschwingungszahl bei steigender Last. Eine sehr schöne, zum Teil allerdings auf das physikalische Gebiet zielende Arbeit befaßt sich mit Lissajous-Figuren und Resonanzschwingungen bei Schraubenfedern und ihre Verwertung zur Bestimmung des Poissonschen Verhältnisses [4]). Eine Arbeit aus der Elastizitätstheorie, die zwar das gestellte Problem nicht voll erledigte, damals als erste Arbeit auf diesem Gebiet jedoch sehr viel Beachtung fand, befaßt sich mit der Knicksicherheit der Stege von Walzwerkprofilen [5]). Auch eine Arbeit zur technischen Hydrodynamik stammt aus dieser Zeit, seine vielbeachtete und auch heute noch viel erwähnte Rechnung zur hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung [6]).

Es wäre natürlich unrecht, darüber zu klagen, daß Sommerfeld schon nach sechsjähriger Tätigkeit in Aachen durch Berufung auf die Professur für theoretische Physik an die Universität München, wo ihn eine Fülle von Aufgaben erwartete, der technischen Mechanik fast ganz verlorengegangen ist. Denn was er in der Physik geleistet hat, ist so gewaltig, daß wir von der Mechanik uns füglich mit dem Verlust abfinden müssen, den unsere Gilde durch seinen Fortgang erfahren hat. Das Interesse für die Fragen der Mechanik und speziell der Hydrodynamik hat aber auch weiter bei Sommerfeld noch nachgewirkt. Seine auf dem Mathematikerkongreß in Rom 1908 vorgetragene Arbeit „Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegungen" [7]), an die sich noch einige hydrodynamische Dissertationen anschlossen, ist eine Frucht dieser Nachwirkung seiner Technikzeit.

Es ist begreiflich, daß er bei der gewaltigen Entwicklung, die die Physik seitdem genommen hat, ganz von ihr absorbiert worden ist und wir nicht hoffen dürfen, daß er noch einmal zu den Problemen der Mechanik zurückkehrt. Wir wünschen ihm, daß er noch auf viele Jahre seine Schaffenskraft zum Besten der deutschen Wissenschaft bewahren möchte und fügen für uns den bescheidenen Wunsch zu, daß er die Entwicklung, die unser Fach seit seinem Ausscheiden aus ihm genommen hat, wenigstens von ferne mit dem alten Interesse verfolgen möge.

L. Prandtl. 925

[1]) F. Klein und A. Sommerfeld: Über die Theorie des Kreisels, Heft I (Einführung) 1897, Heft II (schwerer Kreisel) 1898, Heft III (störende Einflüsse, astronomische und geophysikalische Anwendungen) 1903, Heft IV (technische Anwendungen, mit F. Noether) 1910.

[2]) Die naturwissenschaftlichen Ergebnisse und die Ziele der modernen technischen Mechanik, abgedruckt in Phys. Z., Bd. 4 (1903), S. 773 bis 782.

[3]) Denkschrift der Technischen Hochschule zu Aachen, verfaßt aus Anlaß der Industrie-Ausstellung in Düsseldorf 1902, S. 58 bis 71.

[4]) Festschrift Adolf Wüllner gewidmet zum siebzigsten Geburtstag, Leipzig 1905, S. 162 bis 193.

[5]) Z. f. Mathematik und Physik, Bd. 54 (1906), S. 113 bis 153 und 318 bis 324.

[6]) Z. f. Mathematik und Physik, Bd. 50 (1904), S. 97 bis 155, wieder abgedruckt in Ostwalds Klassikern, Heft 218, S. 108 bis 201.

[7]) Atti del IV. Congresso Internazionale dei Matematici, Rom 1909, S. 116 bis 124.

Stephan Timoschenko zum 60. Geburtstag.

Es gibt in der Mechanikliteratur so manche Arbeit, die rein mathematische Ziele verfolgt und die mechanische Fragestellung nur als schmückenden Rahmen benutzt, und auf der andern Seite auch manche, die mit unzureichenden mathematischen Mitteln an ein Problem herangeht und kaum mehr als eine für den Augenblick geschaffene Notlösung liefert. Zwischen diesen beiden Extremen liegt das fruchtbare Gebiet technisch-wissenschaftlicher Forschung.

In Timoschenko, dem wir heute unsere Glückwünsche zu seinem 60. Geburtstag bringen, verehren wir einen wissenschaftlichen Führer, der ein Menschenleben lang Elastizitätstheorie in diesem fruchtbaren Sinne getrieben hat und einer Generation junger Ingenieur-Forscher den Weg gewiesen hat, der zwischen den beiden Extremen hindurch zum Erfolg führt.

Am Anfang seiner Forschertätigkeit stehen die nur wenig bekanntgewordenen russischen Arbeiten, in denen schon die Fragen der elastischen Stabilität die Hauptrolle spielen, und die schon der Entwicklung der energetischen Methode der Stabilitätstheorie gewidmet sind. In den letzten Jahren vor dem Kriege wandte er sich durch Aufsätze in deutschen und französischen Zeitschriften an eine größere Öffentlichkeit und gab 1913 in den Annales des Ponts et Chaussées einen ersten zusammen-

fassenden Bericht über die gesamte damalige Stabilitätstheorie.

Als er nach dem Kriege, bereits ein Mann von Weltruf, nach Amerika übersiedelte, fand er eine neue Aufgabe vor sich: die Gründung eines großen Schülerkreises. Wie befruchtend er damit auf die Entwicklung der Elastizitätstheorie in Amerika eingewirkt hat, erkennt man daran, daß der überwiegende Teil der jungen amerikanischen Elastiker seine Schüler sind. Neben vielen Einzeluntersuchungen und den Beiträgen zum Handbuch der Physikalischen und Technischen Mechanik hat uns Timoschenko in dieser Zeit vor allem seine Lehrbücher geschenkt, die ihren Weg durch die ganze Welt gemacht haben und vielfach übersetzt worden sind. Mehrere befassen sich mit der Festigkeitslehre im Ganzen. Eins ist der technischen Schwingungslehre gewidmet und zeigt die gleiche Tendenz wie seine Arbeiten zur Stabilitätstheorie: die Entwicklung der auf energetischen Betrachtungen aufgebauten Näherungsverfahren, die dem Ingenieur ein Mittel an die Hand geben, auch in schwierigen Fällen schnell, anschaulich und dabei auf zuverlässigem Boden zu einem Zahlenergebnis zu kommen. Sein letztes großes Werk ist wieder eine zusammenfassende Darstellung der Stabilitätstheorie. Vergleicht man sie mit der französischen Arbeit von 1913, so ermißt man, welche Entwicklung auf diesem Gebiet inzwischen stattgefunden hat, und wer die Literatur im einzelnen kennt, weiß, einen wie großen Anteil Timoschenko selbst, seine Schüler und die durch seine Arbeiten angeregten Forscher aller Völker daran gehabt haben.

Adlershof. W. Flügge. 926

Internationaler Mathematiker-Kongreß 1940.

Der nächste internationale Mathematiker-Kongreß findet in der Zeit vom 4. bis zum 12. September 1940 in Cambridge Massachusetts U.S.A. statt. Außer eingehenden Besprechungen über Algebra, Maßtheorie, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Logik und Topologie werden kürzere Vorträge gehalten werden. Für diese sind zur Zeit sechs Sektionen vorgesehen: 1. Algebra und Zahlentheorie, 2. Analysis, 3. Geometrie und Topologie, 4. Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik und Volkswirtschaftslehre, 5. Mathematische Physik und angewandte Mathematik, 6. Logik, Philosophie, Geschichte und Pädagogik. Nähere Auskunft über Programm, Unterkunft, Gesellige Veranstaltungen usw. erteilt: The American Mathematical Society, 531 West 116th Street, New York City, U.S.A. 920

Neu berechnete Tafeln [1]).

E. L. **INCE**, Tables of the Elliptic-cylinder Functions; and Zeros and Turning Points of the Elliptic-cylinder Functions. Proc. R. Soc. of Edinburgh (1931–32), vol. LII, part IV (Nos. 22, 23), p. 355...433. Als Sonderdruck käuflich. Preis: 7 Shilling.

Die Tafeln betreffen die 12 periodischen Lösungen $ce_{2n}(x,\Theta)$, $se_{2n+1}(x,\Theta)$, $ce_{2n+1}(x,\Theta)$, $se_{2n+2}(x,\Theta)$ für $n = 0, 1, 2$ der Differentialgleichung $\frac{d^2 y}{d x^2} + (a - 2\Theta \cos 2x) y = 0$ („Mathieu sche Funktionen"), die gemäß $\int_0^{2\pi} y^2 dx = \pi$, also auf den quadratischen Mittelwert $\sqrt{0,5}$ normiert sind.

Für $\Theta = 0, 1, 2 \ldots 9, 10, 12 \ldots 18, 20, 24 \ldots 36, 40$ werden gegeben:

1. Die „charakteristischen Zahlen" a_m für ce_m und b_m für se_m, bei denen eine periodische Lösung vorhanden ist, mit 7 Dezimalen. (Für $\Theta = 0$ ist $a_m = b_m = m^2$. Für $\Theta = 40$ ist $a_0 \approx b_1 \approx -67,6$; $a_3 \approx b_4 \approx +1,73$; $b_6 \approx +41,43$.)

2. Die Fourierschen Koeffizienten A_k für ce_m und B_k für se_m mit 7 Dezimalen, soweit sie in der 7. Dezimale von 0 verschieden sind ($k < 24$).

3. Die Nullstellen x und Extremstellen x in Graden mit 4 Dezimalen. (Für se_6 bei $\Theta = 40$: Nullstellen $\approx 54,5^\circ$ und $73,4^\circ$; Extremstellen $\approx 46,3^\circ$; $64,3^\circ$; $81,8^\circ$.)

Ferner werden für $\Theta = 1, 2, \ldots 9, 10$ und $x = 0^\circ, 1^\circ \ldots 89^\circ, 90^\circ$ die Werte der 12 ersten Mathieuschen Funktionen mit 5 Dezimalen und ihre 2. Differenzen gegeben.

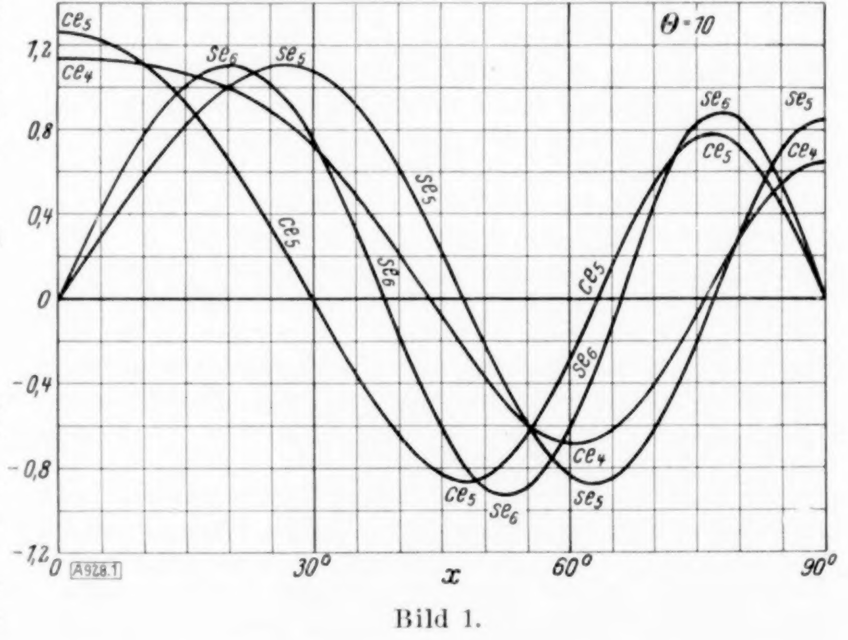


Bild 1.

Um eine Vorstellung von dem Gang der Mathieuschen Funktionen zu geben, sind in Bild 1 in dem Bereich $x = 0 \ldots 90^\circ$ die Kurven für ce_4, se_5, ce_5, se_6 gezeichnet, und zwar bei $\Theta = 10$.

Die Interpolation nach Θ bei festem x stößt noch auf Schwierigkeiten.

Für die Berechnung wurden folgende 4 Maschinen benutzt: eine Brunsviga nova III, eine Trinks-Triplex-Brunsviga, eine Facit und eine Sundstram-Buchungsmaschine. Die Berechnungsarbeit hat sich anscheinend etwa über fünf Jahre erstreckt.

Fritz Emde. 928

[1]) Künftig wird hier über neu berechnete Tafeln höherer Funktionen berichtet werden.

Persönliches.

Der o. Prof. für Bauelemente der Luftfahrzeuge an der Techn. Hochschule Berlin Dr. Herbert Wagner trat vom Lehramt zurück.

Prof. Dr. Hamel, Berlin, wurde zum ordentlichen Mitglied der Preußischen Akademie der Wissenschaften ernannt.

Der n. b. a. o. Prof. an der Techn. Hochschule Karlsruhe Dr. Wolfgang Haack wurde zum o. Prof. für Mathematik an dieser Hochschule ernannt.

Für den Textteil verantwortlich: Professor Dr. Fr. A. Willers, Dresden-A. 20, Dorotheenstr. 12. — Printed in Germany. —

— Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.

A. Bezugsbedingungen:

Die „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik" erscheint jeden zweiten Monat (Februar, April, Juni usw.)

Die Bezugszeit ist halbjährig (Ausland ganzjährig).

Der Bezugspreis beträgt ½jährlich **15.— RM.**; ganzjährig **30.— RM.**
für Mitglieder „ **13.50 RM.**; „ **27.— RM.**

Bestellung kann bei jeder Buchhandlung oder beim Verlag aufgegeben werden.

Abbestellung ist nur am Schluß eines Halbjahres bezw. Jahres zulässig. Nicht befristete Bestellungen laufen von Halbjahr zu Halbjahr weiter (Ausland von Jahr zu Jahr).

Bezugsgebühren sind stets zu Beginn eines neuen Halbjahres oder Jahres fällig und werden bei Ausbleiben der Zahlung durch Nachnahme eingezogen.

Lieferung unter Streifband.

Einzelheftpreis: 6.— RM., für Mitglieder 5.40 RM. zuzüglich 15 Rpf. Postgeld.

VDI-Literaturkartei: Auf Wunsch erhalten unsere Bezieher unberechnet Karteikarten über den Inhalt sämtlicher Zeitschriften des VDI in monatlichen Zusammenstellungen gegen Erstattung der jährlichen Versandkosten von 1.— RM.

ZUR BEACHTUNG

Lieferstörungen werden am schnellsten beseitigt, wenn das Ausbleiben der Zeitschrift umgehend mitgeteilt wird.

Um- und Abbestellungen sind zweckmäßig stets dorthin zu richten, wo die Bestellung aufgegeben wurde.

Bei Zuschriften und Zahlungen wird um genaue Angabe der vollständigen Anschrift und des Verwendungszweckes gebeten, da nur dadurch Verwechslungen und Lieferstörungen vermieden werden.

B. Anzeigenpreise

Satzspiegel der 1/1 Seite 171/250 mm.
1/1 Seite 160.— RM, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16 Seite anteilig.

Nachlaß: bei 3maliger Aufnahme im Jahr 3 vH, bei 6maliger Aufnahme im Jahr 5 vH.

Aufschläge für Vorzugsplätze nach vorheriger Vereinbarung laut Tarif. Erfüllungsort für beide Teile Berlin-Mitte.

VDI-VERLAG G. M. B. H., BERLIN NW 7, DOROTHEENSTR. 40

Fernsprecher: Sammel-Nr. 116171. Postscheckkonto: Berlin 102378, Wien 174489, Prag 77829, Budapest 59951, Warschau 194372. Bankverbindungen: Dresdner Bank, Depositen-Kasse 65, Berlin C 2, Wallstr. 5 bis 8. — Deutsche Bank, Stadtzentrale Abt. A, Berlin W 8, Mauerstraße 26/27. Drahtanschrift: Ingenieurverlag. Geschäftszeit: Montag bis Freitag 8 bis 17 Uhr, Sonnabend 8 bis 12³⁰ Uhr.